Derivator

Wanmin Liu

8 januari 2025

Table of contents

Derivat vid en punkt

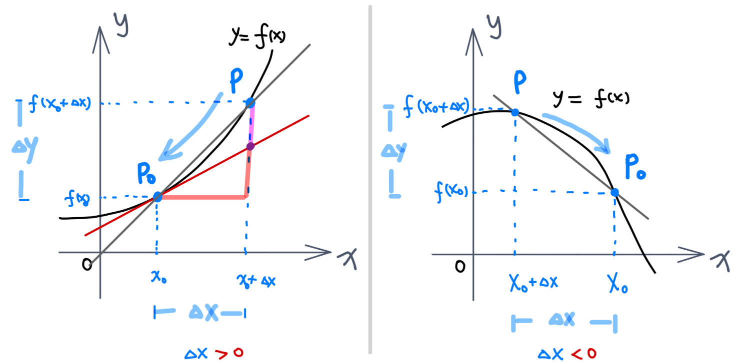
Inledning

Betrakta funktionen $y = f(x)$.

Om vi ändrar x från x_0 till $x_0 + \Delta x$ så kommer funktionsvärdet y att ändras från $f(x_0)$ till $f(x_0 + \Delta x)$.

Beteckna Δy för ändringen, dvs

$$\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



Definition

Definition 1.1
Antag att $y = f(x)$ definieras i en omgivning av $x = x_0$. Om *differenskvoten* eller *ändringskvoten*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

närmar sig talet L då $\Delta x \to 0$ så kallas L för ***derivatan av*** f ***i pubnkten*** x_0 och betecknas exempelvis

$$f'(x_0), y'(x_0), \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}, \text{ eller } Df(x_0).$$

Man säger att f är ***deriverbar i*** x_0, med värdet $f'(x_0) = L$, dvs

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Geometrisk tolkning av begreppet derivata

Genom punkterna $P_0 := (x_0, f(x_0))$ och $P := (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ på kurvan $y = f(x)$ lägger vi en linje. Denna linje har *riktningskoefficienten*

$$k_{P_0 P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Då $\Delta x \to 0$ kommer punkten P att närma sig P_0 och linjen genom P_0 och P kommer att vrida sig kring P_0.

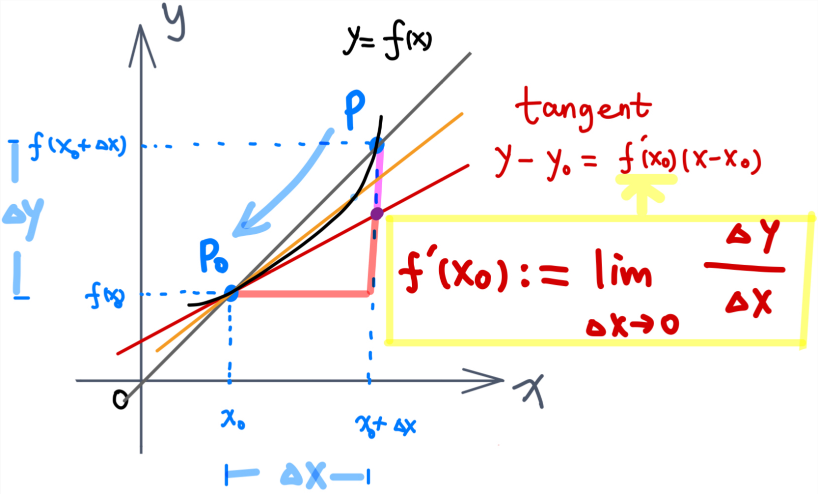
Om f är deriverbar i x_0 så kommer linjen att nå ett gränsläge, en linje med riktningskoefficienten $f'(x_0)$. Denna linje kollas *tangenten* till kurvan i punkten x_0. Tangentens ekvation ges av

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Geometrisk tolkning av begreppet derivata

Derivatan $f'(x_0)$ är lutningen på tangenten till kurvan $y = f(x)$ vid punkten $x = x_0$.

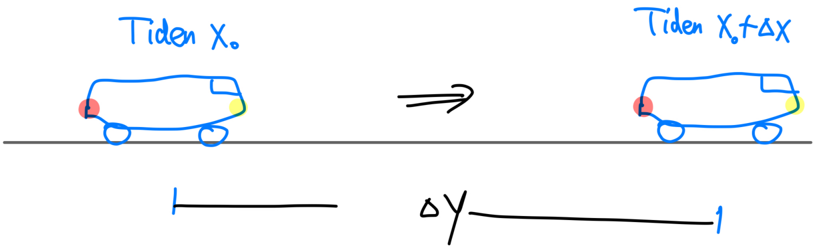
Geometrisk tolkning av begreppet derivata



Om $y = f(x)$ representerar en kropps position som funktion av tiden x, så ges ***medelhastigheten*** från tiden x_0 till $x_0 + \Delta x$ av

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}.$$

Derivatan $f'(x_0)$ är kroppens momentanhastighet vid tiden $x = x_0$.



Fysisk tolkning av begreppet derivata
Derivatan i x_0 talar om hur snabbt funktionsvärdet ändras precis i en viss punkt x_0. Man kan se derivatan som ***momentanhastigheten***.

Derivata som funktion

Definition 2.1
Om en funktion $y = f(x)$ är deriverbar i *varje punkt* i sin definitionsmängd säger vi kortfattat att f är ***deriverbar***. Funktionen $x \mapsto f'(x)$, $x \in D_f$, kallas ***derivatan av*** f och betecknas exempelvis

$$f', y', \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, Df,$$

och

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exempel
Låt $f(x) = ax + b$ vara en linjär funktion, då

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = a.$$

Derivata och differentialer

Differential

Man är intresserad av att undersöka hur en liten ändring Δx av x ändrar funktionsvärdet av en funktion $y = f(x)$. Detta kan man göra genom att räkna ut differensen $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Om f är deriverbar i x_0 så närmar sig differenskvoten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ värdet $f'(x_0)$ då $\Delta x \to 0$. Vi får en approximation av differensen Δf.

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x, \text{ för små värden på } \Delta x.$$

Definition 3.1
Uttrycket $f'(x_0) \cdot \Delta x$ kallas för ***differentialen*** av f i punkten x_0 och betecknas $\mathrm{d}y(x_0)$ eller $\mathrm{d}f(x_0)$. Med differentialen $\mathrm{d}y$ av en funktion $y = f(x)$ (i punkten x) menas

$$\mathrm{d}y := f'(x) \cdot \Delta x.$$

Differentialen $\mathrm{d}y$ är en approximation av Δy

Uttrycket $\mathrm{d}x$ kan ses som differentialen av funktionen x, vars derivata alltid är 1, dvs

$$\mathrm{d}x := 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Då får man uttrycket

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x = f'(x)\mathrm{d}x.$$

Approximationen $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ innebär att man approximerar kurvan med dess tangent.

Sammanfattning

Vi sammanfattar ovanstående begrepp i en bild, där

- Δx är förändringen i variabeln x,
- $\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ är förändringen i funktionsvärdet,
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ är ***differenskvoten***,
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ är ***derivatan***,
- $\mathrm{d}y := f'(x_0)\mathrm{d}x$ är ***differentialen*** av $y = f(x)$ i x_0 och $\mathrm{d}x := \Delta x$.
- Differentialen $\mathrm{d}y$ är en *linjär approximation* av differensen Δy.