Tillämpningar av derivatan

Wanmin Liu

2025-10-06

Del 1. Repetition och tillämpningar av derivatan.

14.35 - 14.55. Repetition.

- Definition av derivatan
- Derivatan Tabell
- Definition av talet e.
- Definition av naturlig logaritm
- Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$.

14.55 - 15.05 Exempel.

15.05 - 15.35 Tre uppgifter i boken.

Definition av derivatan

Låt $y = f(x)$ vara en funktion.

Vi skriver

- $\Delta x = (x + h) - x = h$
- $\Delta y = f(x + h) - f(x)$

$D(f(x)) = f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Definition av talet e.

Vi **definierar** en speciell konstant e så att

$$D(e^x) = e^x, \quad \text{eller } (e^x)' = e^x$$

genom gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Det är en indirekt definition.

En ekvivalent definition är följande

$e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.7$.

Definition av naturlig logaritm

Om x är positivt skriver vi om x till formen e^y för ett reellt tal y, och definierar y som den naturliga logaritmen till x, med beteckningen $\ln(x)$, det vill säga $y = \ln(x)$ är talet så att

$$e^{\ln x} = x.$$

- Definitionsmängd av funktion $y = \ln x$ är alla positiva tal $\{x|x > 0\}$.
- Värdemängden är alla reella tal.

Till exempel:

- $\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$.
- $\ln e = 1$ eftersom $e^1 = e$.
- $\ln e^{-1} = -1$ eftersom $e^{\ln e^{-1}} = e^{-1}$.
- Om $a > 0$, då är $a = e^{\ln a}$.

Exponential- och naturliga logaritm operationer är inversa operationer

Definition samband

För $x > 0$ och $y \in \mathbb{R}$, dvs $-\infty < y < \infty$ har vi

$$x = e^y \iff y = \ln(x)$$

Exponential- och naturliga logaritm operationer är inversa operationer

För $x > 0$ och $y \in \mathbb{R}$, dvs $-\infty < y < \infty$ har vi

$$e^{\ln x} = x \iff \ln(e^y) = y.$$

Graf för den naturliga logaritmfunktionen

Den naturliga logaritmfunktionen $y = \ln x$ definieras som reella tal $\ln x$ sådana att $e^{\ln x} = x$.

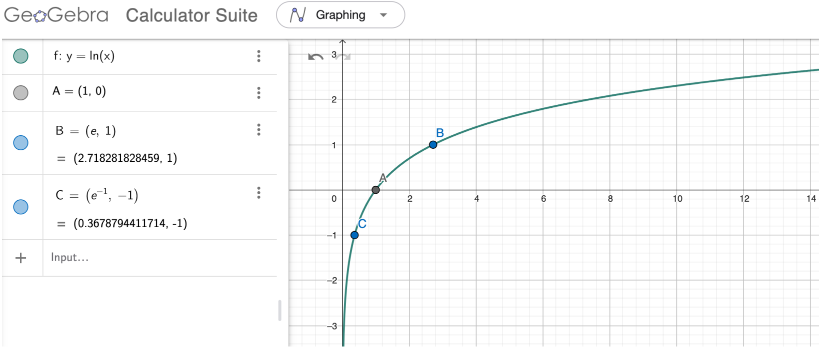

Figure 1: Den naturliga logaritmfunktionen

En generell logaritmisk funktion

En generell logaritmisk funktion med basen a (a är ett positivt tal) betecknas med notationen $\log_a(x)$, med den definierade ekvationen $a^{\log_a(x)} = x$.

- Definitionsmängd av funktion $y = \log_a(x)$ är alla positiva tal $\{x|x > 0\}$.
- Värdemängden av $\log_a(x)$ är alla reella tal.
- $\ln(x)$ är förkortningen för $\log_e(x)$ med basen e.
- $\lg(x)$ är förkortningen för $\log_{10}(x)$ med basen 10, t.ex $\lg(100) = 2$, $\lg(0,1) = -1$.

Låt a vara en positiv konstant, och $x > 0$. Vi har $x = a^y$, $y = \log_a(x)$ och

$$a^{\log_a(x)} = x, \qquad \log_a(a^y) = y.$$

Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$.

Hur? Vi skriver om a:

$a = e^{\ln(a)}$.

Då är $y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln(a)x} = e^{kx}$ med $k = \ln a$.

Exponentialfunktioner kan allmänt skrivas

$$f(x) = C \cdot e^{kx}$$

för vissa konstanter k och C.

Derivatan Tabell

$f(x)$	$D(f(x)) = f'(x)$	**Anmärkningar**
k	0	k är en konstant.
x^n	nx^{n-1}	n är ett naturligt tal.
x^a	ax^{a-1}	a är ett reellt tal.
e^x	e^x	Detta är definitionen av talet e.
e^{kx}	ke^{kx}	k är en konstant.
a^{kx}	$a^{kx} \cdot k \cdot \ln(a)$	k är en konstant och a är ett positivt tal.
$a \cdot g(x)$	$ag'(x)$	a är reella tal.
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	

Exempel 1.

Värdet av en samling antika mynt som köptes för 8 år sedan ökar exponentiellt med tiden. Inköpspriset var 23 000 kr och nu är den värd 27 000 kr.

a. Bestäm en exponetialfunktion som beskriver myntsamlingens värdeökning under t år.

b. Vid vilken tidpunkt kommer värdet att öka med 1 000 kr per år?

Exempel 1. Ledtråd.

(a) Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter k och C.

Vi vet att $f(0) = 23000$ och $f(8) = 27000$.

Vi skulle kunna använda dessa två villkor för att hitta värdena på k och C.

(b) Vi skulle lösa ekvationen

$$f'(t) = 1000$$

för tiden t.

Exempel 1.

Lösning.

Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter k och C.

Vi vet att $f(0) = 23000$ och $f(8) = 27000$.

Då är $f(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = C$. Så får vi $C = 23000$.

Nu är

$$f(8) = 23000 \cdot e^{k \cdot 8} = 27000.$$

Vi deviderar båda leden med 23000 och får

$$e^{k \cdot 8} = \frac{27000}{23000}.$$

Det vill säga

$$e^{8k} = \frac{27}{23}.$$

Exempel 1.

För denna ekvation tar vi den naturliga logaritmen för båda sidor och får

$$\ln(e^{8k}) = \ln(\frac{27}{23}).$$

Med definitionen av den naturliga logaritmen får vi $\ln(e^{8k}) = 8k$. Så får vi ekvationen

$$8k = \ln(\frac{27}{23})$$

och

$$k = \frac{\ln(\frac{27}{23})}{8} \approx 0,02.$$

Svar: Myntsamlingens värde under t år är

$$f(t) = 23000 \cdot e^{0,02t}.$$

Exempel 1.

(b) Vi skulle lösa ekvationen

$$f'(t) = 1000$$

för tiden t.

Enligt deriveringsreglerna får vi

$$f'(t) = C \cdot e^{kt} \cdot k = 23000 \cdot e^{0{,}02t} \cdot 0,02 = 460 \cdot e^{0{,}02t}.$$

Sätt

$$f'(t) = 1000.$$

Vi får

$$460 \cdot e^{0{,}02t} = 1000.$$

Vi dividerar 460 på båda sidor av ekvationen och får

$$e^{0{,}02t} = \frac{1000}{460}.$$

Exempel 1.

Vi tar den naturliga logaritmen för båda sidor och får

$$\ln(e^{0,02t}) = \ln(\frac{1000}{460}).$$

Dvs,

$$0,02t = \ln(\frac{1000}{460}),$$

och

$$t = \frac{\ln(\frac{1000}{460})}{0,02} \approx 38,82 \approx 39.$$

Svar: Ungefär 39 år efter inköpet kommer värdet att öka med 1 000 kr per år.

Uppgift

Sidan 106 - 107, 3230, 3231, 3237

Ledtråd till 3237: $e^{0,017} \approx 1,017$.

Paus

15.35 - 15.55

Del 2: 15.55 - 17.00.

Del 2.

15.55 - 16.25

- Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva
- Tangentlinjens lutning
- Normallinjens lutning
- Exempel.

16.25 - 17.00

- Tre uppgifter i boken.

Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva

Givet en kurva $y = f(x)$ och en punkt P på kurvan med koordinaterna (x_0, y_0). Vi vill beräkna ekvationerna för tangent- och normallinjerna till kurvan vid punkt P.

Enligt definitionen av derivata ges tangentens lutning vid punkten P av $k_{\mathrm{tangent}} = f'(x_0)$.

Definition. En *normal* till en kurva är en linje som bildar *rät vinkel* mot kurvans tangent i en viss punkt.

Om $k_{\mathrm{tangent}} \neq 0$, så har vi

$$k_{\mathrm{tangent}} \cdot k_{\mathrm{normal}} = -1 \quad \text{eller } k_{\mathrm{normal}} = \frac{-1}{k_{\mathrm{tangent}}}.$$

Om $k_{\mathrm{tangent}} = 0$, så är den normala linjen en vertikal (lodrätt) linje $x = x_0$.

Exempel 2.

Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y = e + 7^x$ där $x = 0$.

Ledtråd

- Vilka är tangentpunktens koordinater?
- Vad är tangentens lutning?
- Vad är normalens lutning?

Exempel 2.

Lösning.

Steg 1. Vi skriver koordinaterna för tangentpunkten.

Låt oss kalla tangentpunkten P. $y(0) = e + 7^0 = e + 1$. Så koordinaterna för punkt P är $(0, e+1)$.

Steg 2. Vi hittar tangentens lutning och normalens lutning.

$$y' = 0 + 7^x \cdot \ln 7 = 7^x \cdot \ln 7.$$

$$k_{\text{tangent}} = y'(0) = 7^0 \cdot \ln 7 = \ln 7.$$

$$k_{\text{normal}} = \frac{-1}{k_{\text{tangent}}} = \frac{-1}{\ln 7}.$$

Tre metoder att skriva linjens ekvation.

Med geometrin (t. ex. tangent, normal, parallell, derivata ...) kan vi hitta lutningen k.

Lutningen på linjen som går genom två kända punkter $(x_1,\ y_1)$ och $(x_2,\ y_2)$ är $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. (Det står i formelblad.)

Motod 1. Skriv $y = kx + m$ och $y_0 = kx_0 + m$ för att hitta m.

Motod 2. $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ eftersom linjens lutning är k. (Det står i formelblad.)

Motod 3. $y - y_0 = k(x - x_0)$. Det är linjens ekvation genom punkten $(x_0,\ y_0)$ där vi känner lutningen k.

Exempel 2.

Steg 3. Vi hittar tangentens ekvation. Tangenten har ekvationen

$$y = (\ln 7)x + m.$$

Punkt P ligger på tangentlinjen, så koordinaterna för P uppfyller också tangentlinjens ekvation. Dvs

$$e + 1 = (\ln 7) \cdot 0 + m,$$

och $m = e + 1$. Vi har ekvationen för tangentlinjen till kurvan i $x = 0$:

$$y = (\ln 7)x + e + 1.$$

Exempel 2.

Steg 4. Vi hittar normalens ekvation. Normalen har ekvationen

$$y = \frac{-1}{\ln 7} \cdot x + m.$$

Punkt P ligger också på normallinjen, så koordinaterna för P uppfyller också normallinjens ekvation. Dvs

$$e + 1 = \frac{-1}{\ln 7} \cdot 0 + m,$$

och $m = e + 1$. Vi har ekvationen för normallinjen till kurvan i $x = 0$:

$$y = \frac{-1}{\ln 7} \cdot x + e + 1.$$

Uppgift

S. 107: 3239, 3241

S. 115: 32. Tangenten till kurvan $y = ae^{2x} + bx$ i punkten $(0, 4)$ har lutningen $k = 3$. Bestäm talen a och b.

Ledtråd: Tangentpunkten $(0, 4)$ ligger också på kurvan, så dess koordinater uppfyller kurvans ekvation. Vi vet också $y'(0) = 3$.