Exponentialfunktioner och deras derivator

Wanmin Liu

2025-10-02

Vad ska vi göra på lektion 1?

Vi fokuserar på att lära oss

- Vad betyder talet e, som är ungefär 2,7.
- Derivatan av e^x.
- Derivatan av a^x för ett positivt tal a.

Potenslagar

Basen a ska vara positiv i funktion $y = a^x$.

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$

Definitionen av derivatan

Låt $y = f(x)$ vara en funktion.

Vi skriver

- $\Delta x = (x + h) - x = h$
- $\Delta y = f(x + h) - f(x)$

$D(f(x)) = f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Derivatan av exponentialfunktion

Låt a vara ett positivt tal och $y = f(x) = a^x$.

- $\Delta x = h$
- $\Delta y = f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x \cdot a^h - a^x = a^x(a^h - 1)$.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$.

Om $x = 0$, så är $f'(0) = a^0 \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$. $(a^0 = 1)$

Definition av talet e.

Vi definierar talet e så att gränsvärdet är $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Detta är en indirekt definition.

Värdet av talet e.

$\frac{e^h-1}{h} \approx 1$ för små värden på h. Dvs

- $e^h - 1 \approx h$
- $e^h \approx 1 + h$
- $e \approx (1+h)^{1/h}$

Om vi tar det små värdet $h = 1/n$ för naturliga tal n, och tar n till oändlighet, så har vi

$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.7$

Med definitionen av talet e har vi att om $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$, dvs

$D(e^x) = e^x$.

Reflection - vad vi har lärt oss

Varför $D(e^x) = e^x$?

- Det är exakt definitionen av talet e.

Vad är värdet av talet e?

- $e \approx 2.7 > 1$

Vi ritar graf för en funktion $y = a^x$ med bas $a > 1$.

Exempel

1. Derivera $f(x) = 3e^x$.
2. Bestäm ritningskoefficienten för tangenten till $y = x^5 + e^x - 12$ där $x = \pi$.

- **Ledtråd** Derivera varje term för sig.
- Sätt in $x = \pi$ i derivatfunktionen.

Uppgifter

S.98 - 99 3202, 3204, 3207, 3209, 3213

Uppgift till elever med hög nivå. 3216

Paus

Vad ska vi göra på lektion 2?

- Derivatan av e^{kx} för en konstant k.
- Naturlig logaritm $y = \ln x$ för $x > 0$.
- Derivatan av a^x (för ett positivt tal a).
- Derivatan av a^{kx} för en konstant k och $a > 0$.

$D(e^{kx}) = ke^{kx}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nu är $f(x) = e^{kx}$ för en konstant k.

- $\Delta x = h$.
- $\Delta y = f(x+h) - f(x) = e^{k(x+h)} - e^{kx} = e^{kx}(e^{kh} - 1)$.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{kx}(e^{kh}-1)}{h} = e^{kx} \lim_{h\to 0} \frac{e^{kh}-1}{h}$.

Ledtråd

$\lim_{h\to 0} \frac{e^{kh}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{kh}-1}{kh} \cdot k = k \lim_{t\to 0} \frac{e^{t}-1}{t} = k$ där $t = kh$.

Så får vi slutsatsen $D(e^{kx}) = ke^{kx}$ eller $(e^{kx})' = ke^{kx}$.

Definition av naturlig logaritm

Definition

Om $x = e^y$, så är $y = \ln x$, dvs $\ln x$ är talet så att $e^{\ln x} = x$.

- $\ln(x)$ är förkortningen för $\log_e(x)$
- Definitionsmängd av funktion $y = \ln x$ är alla positiva tal $\{x|x > 0\}$.

Till exempel:

- $\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$.
- Om $a > 0$, då är $a = e^{\ln a}$.

Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$.

Hur? Vi skriver om a

$a = e^{\ln(a)}$.

Då är $y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln(a)x}$.

Derivatan av a^x med $a > 0$.

Så vi har $y = a^x = e^{kx}$ med $k = \ln(a)$.

$D(a^x) = D(e^{kx}) = ke^{kx} = ka^x = a^x \cdot \ln a$.

På samma sätt har vi $D(a^{kx}) = a^{kx} \cdot \ln(a) \cdot k$.

En kort sammanfattning

Vad är talet e?

- Det är en konstant, ungefär värdet 2,7, så att $D(e^x) = e^x$.

Varför $D(e^x) = e^x$

- Det är precis definitionen av e.

Vad är naturlig logaritm $\ln x$?

- Det är talet (kan vara positiv, noll eller negativ) så att $e^{\ln x} = x$. x måste vara positiv.

Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$ med $k = \ln a$.

$D(a^x) = a^x \cdot \ln a$

$D(a^{kx}) = a^{kx} \cdot \ln(a) \cdot k$.

Exempel.

Derivara $h(x) = x^3 - 11 \cdot 3^{5x}$.

Lösning. $D(x^3) = 3x^2$. $D(3^{5x}) = 3^{5x} \cdot \ln 3 \cdot 5$

$D(h(x)) = D(x^3) - 11 \cdot D(3^{5x}) = 3x^2 - 55 \ln 3 \cdot 3^{5x}$.

Derivatan Tabell

$f(x)$	$D(f(x)) = f'(x)$	**Anmärkningar**
k	0	k är en konstant.
x^n	nx^{n-1}	n är ett naturligt tal.
x^a	ax^{a-1}	a är ett reellt tal.
e^x	e^x	Detta är definitionen av talet e.
e^{kx}	ke^{kx}	k är en konstant.
a^{kx}	$a^{kx} \cdot k \cdot \ln(a)$	k är en konstant och a är ett positivt tal.
$a \cdot g(x) + b \cdot h(x)$	$aD(g(x)) + bD(h(a))$	a och b är reella tal.

Uppgifter

S 102 - 103. 3218 a), c). 3221, 3224,

Uppgift till elever med hög nivå.

3227 Bestäm ekvationen i formen $y = kx + m$ för tangenten till kurvan $y = f(x) = e^2 - e^{\sqrt{2} \cdot x}$ i punkten där $x = \sqrt{2}$.

Ledtråd

- Vad är k-värdet? $D(f(\sqrt{2}))$
- Vilken punkt går tangenten igenom? Vilka är dess koordinater? $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$

Exit-tickets

1. $D(e^x) = e^x$ eftersom $\underline{\hspace{6cm}}$.
2. $D(e^{3x}) = \underline{\hspace{6cm}}$.
3. Vi skriver om en positiv tal a som $a = e^{\square}$ genom definition av naturlig logaritm $e^{\ln x} = x$.
4. $\ln 1 = \underline{\hspace{1.5cm}}$ eftersom $e^{\square} = 1$.
5. Låt $a > 0$. Med hjälp av formel $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$ och $D(x^a) = a \cdot x^{a-1}$ har vi $D(\pi^x + x^\pi) = \underline{\hspace{6cm}}$.
6. Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$ med $k = \underline{\hspace{1.5cm}}$.

Exit-tickets (med svar)

1. $D(e^x) = e^x$ eftersom det är definitionen av talet e.
2. $D(e^{3x}) = 3e^{3x}$.
3. Vi skriver om en positiv tal a som $a = e^{\ln a}$ genom definition av naturlig logaritm $e^{\ln x} = x$.
4. $\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$.
5. Låt $a > 0$. Med hjälp av formel $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$ och $D(x^a) = a \cdot x^{a-1}$ har vi $D(\pi^x + x^\pi) = \pi^x \ln \pi + \pi x^{\pi - 1}$.
6. Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$ med $k = \ln a$.