

# Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre?

## – Det jämna lyftet och omkretsens linjäritet

WANMIN LIU  
[wanminliu@gmail.com](mailto:wanminliu@gmail.com)

25 apr 2026

### 1 HUR METERN UPPSTOD: EN RESA GENOM HISTORIEN

Under den franska revolutionen i slutet av 1700-talet fanns en vision om att skapa ett universellt måttssystem ”för alla folk, för all tid”. Astronomerna Jean-Baptiste Delambre och Pierre Méchain ägnade sju år åt att mäta meridianbågen mellan Dunkerque och Barcelona under krig och kaos (Alder, 2003). Man fastställde att *en meter* skulle motsvara *en tiomiljondel* av avståndet från ekvatorn till nordpolen längs Paris-meridianen.

Vi idealiserar nu situationen och antar att jorden är ett perfekt klot. Utifrån denna definition kan vi översätta längdmåttet till en global geometrisk storhet. Avståndet från ekvatorn till nordpolen längs Paris-meridianen är då **tiomiljon** meter, vilket motsvarar en fjärdedel av jordens omkrets. Därmed blir jordens totala omkrets 40 000 000 m (eller 40 000 km). Vi betecknar jordens omkrets med  $C$ , mätt i meter. Då gäller  $C = 40\,000\,000$ .

Eftersom en sfär har samma omkrets i alla storcirklar följer att jordens ekvator har samma längd. Det är denna cirkel som i denna artikel benämns *jordens midja*, och som kommer att utgöra vårt centrala geometriska objekt.

### 2 ETT KONTRAITUITIVT TANKEEXPERIMENT

Utifrån denna bestämning av jordens omkrets kan vi nu formulera ett geometriskt tankeexperiment (Kafi & Liu, 2024).

**Problem 1** Repet runt jorden (jämnt lyft). *Anta att jorden är ett perfekt klot med ekvatorns längd 40 000 000 m. Föreställ dig ett rep spänt runt jordens ekvator. Repet förlängs med exakt en meter. När repet inte längre är spänt lyfts det jämnt från marken och bildar en konstant höjd  $h$  över jordytan runt hela jorden. Hur stor blir höjden  $h$ ?*

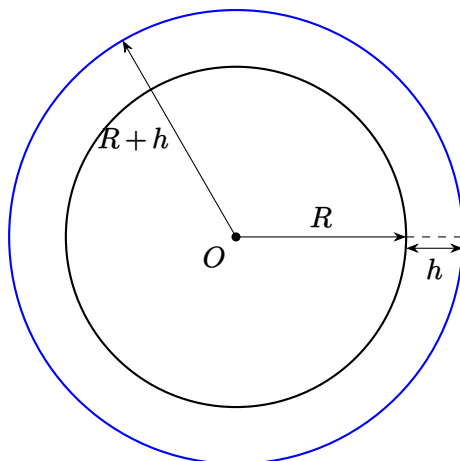
Välj ett av följande två alternativ:

- A. Höjden över marken är så liten att inte ens en myra kan ta sig under repet.
- B. Höjden över marken är så stor att en katt kan ta sig under repet.

### 3 DEN MATEMATISKA MODELLEN: KONCENTRISKA CIRKLAR

För att analysera problemet modellerar vi situationen med två koncentriska cirklar med gemensamt centrum  $O$ , se Figur 1.

Vi låter  $R$  representera jordens radie i meter. Den inre cirkeln representerar jordens ekvator med radie  $R$  och omkrets  $C$ . Den yttre cirkeln representerar det förlängda repet och har radie  $R + h$  och omkrets  $C + 1$ .



Figur 1: Jordens radie  $R$  och radien  $R + h$  för det förlängda repet.

Kvoten mellan en cirkels omkrets och dess diameter är konstant (alla cirklar är likformiga). Vi definierar denna konstant som talet  $\pi$ . Eftersom diametern är  $d = 2r$  får vi

$$C(r) = \pi d = 2\pi r.$$

Detta ger för cirkeln som representerar jordens ekvator

$$2\pi R = C,$$

och för det förlängda repet

$$2\pi(R + h) = C + 1.$$

Genom att subtrahera den första ekvationen från den andra får vi

$$2\pi h = 1.$$

Alltså följer

$$h = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16.$$

Det betyder att repet lyfts ungefär 0,16 m eller 16 cm från marken, så högt att en katt kan ta sig under repet (alternativ **B**).

Resultatet visar att höjden *inte* beror på jordens radie  $R$  (som är  $\frac{40000000}{2\pi} \approx 6366000$ ). Detta innebär att samma relation gäller oavsett skala: från jordens ekvator till en liten cirkelskiva. Om vi därför ersätter jordens midja med omkretsen av en mycket mindre cirkelskiva, till exempel en tallrik, och lägger ett snöre runt den, förändras inte resultatet. Förlänger vi snöret med en meter och lyfter det jämnt runt hela skivan blir höjden fortfarande  $h = 1/(2\pi)$ .

Vi kan till och med tänka oss att cirkeln krymper till en enda punkt. Ett snöre med längden 1 m som lyfts jämnt runt denna punkt bildar då en cirkel med radie  $h$ . Eftersom cirkelns omkrets är 1 m gäller fortfarande  $h = 1/(2\pi)$ .

## 4 DEN DJUPARE SANNINGEN: LINJÄRA FUNKTIONER OCH KONSTANT FÖRÄNDRINGSTAKT

Varför blir resultatet oberoende av skalan? Svaret ligger i att linjära funktioner har konstant förändringstakt.

En funktion sägs vara *linjär* om den kan skrivas på formen

$$f(x) = kx + m,$$

där  $k$  och  $m$  är konstanter. Grafen till en sådan funktion är en rät linje.

*Derivatan* beskriver en funktions förändringstakt i en given punkt, alltså hur snabbt funktionsvärdet förändras när variabeln ändras. Geometriskt motsvarar den lutningen på funktionens tangent i denna punkt. Om funktionen är linjär är derivatan konstant, vilket betyder att förändringstakten är densamma överallt.

I vårt fall betraktar vi omkretsen  $C$  som en funktion av radien  $r$ :

$$C(r) = 2\pi r,$$

som är en linjär funktion av  $r$  (med  $k = 2\pi$  och  $m = 0$ ).

Vi får

$$C'(r) = \frac{dC}{dr} = 2\pi,$$

och <sup>1</sup>

$$\Delta C = 2\pi \Delta r.$$

Detta innebär att om radien ökar med 1 m ( $\Delta r = 1$ ) så ökar omkretsen med  $2\pi$  m ( $\Delta C = 2\pi$ ). Omvänt gäller att om omkretsen ökar med 1 m ( $\Delta C = 1$ ) så ökar radien med

$$\Delta r = \frac{1}{2\pi},$$

vilket är precis vårt ursprungliga problem: vi vet att  $\Delta C = 1$ , och vi söker motsvarande förändring i radien  $\Delta r$ .

Eftersom förändringstakten är konstant ( $C'(r) = 2\pi$ ) beror resultatet inte på storleken hos  $r$ . Samma regel gäller därför både för en liten tallrik och för hela jorden.

## 5 HEMLIGHETEN BAKOM LÖPARBANAN: EN HEURISTISK UPPTÄCKT

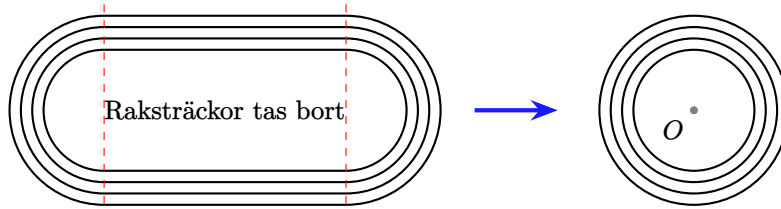
För att se hur samma matematiska idé dyker upp i ett helt annat sammanhang betraktar vi nu en till synes orelaterad situation.

När man tittar på ett stafettlopp på en friidrottsbana ser man något märkligt: löparna startar inte på samma linje. I de yttre banorna står löparna tydligt längre fram än i de inre. Varför är det så?

**Problem 2** Stafettbanor. *Betrakta ett  $4 \times 100$  m stafettlopp på en friidrottsbana. Löparna startar i olika positioner i de olika banorna eftersom de yttre banorna har större radie. Anta att varje bana är 1 m bred. Hur mycket längre är ett varv i en yttre bana jämfört med den närmaste inre banan?*

<sup>1</sup> Per definition är  $dr = \Delta r$ ,  $dC = C'(r) dr$  och  $\Delta C = C(r + \Delta r) - C(r)$ . Eftersom  $C(r) = 2\pi r$  är linjär gäller exakt  $\Delta C = dC$ .

För att förstå detta kan vi först göra en geometrisk förenkling. En löparbana består av två raksträckor och två kurvor. Eftersom raksträckorna är lika långa i alla banor kan de inte bidra till någon skillnad mellan banorna. Vi kan därför bortse från dem och i stället fokusera på kurvorna. När dessa kurvor sätts ihop ser vi att situationen fortfarande kan beskrivas med en modell av **koncentriska cirklar**, som i Figur 2.



Figur 2: Löparbana till koncentrisk cirkelmodell.

Vi kan nu beräkna hur mycket startlinjen måste flyttas på två olika sätt.

1. **Algebraisk metod (Avsnitt 3):** Vi modellerar löparbanan med koncentriska cirklar. Antag att radien för den inre banan är  $r$ . Den närmaste yttre banan ligger en banbredd längre ut och har därför radien  $r + \Delta r$ , där  $\Delta r$  just är banans bredd.

Vi jämför nu omkretsen för dessa två banor.

$$\Delta C = 2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r.$$

Precis som i tidigare problem ser vi att termerna med  $r$  tar ut varandra, och kvar blir

$$\Delta C = 2\pi \Delta r.$$

2. **Linjäritetsmetoden (Avsnitt 4):** Eftersom omkretsen ges av  $C(r) = 2\pi r$  vet vi att detta är en linjär funktion. Det innebär att förändringen i omkrets kan skrivas direkt med förändringstakten:

$$\Delta C = dC = C'(r) \Delta r = 2\pi \Delta r.$$

Eftersom banbredden är 1 m har vi  $\Delta r = 1$ , och därmed

$$\Delta C = 2\pi \approx 6,28.$$

Den yttre löparen måste alltså starta ungefär 6,28 m längre fram<sup>2</sup>.

Resultatet beror inte på storleken hos systemet, utan på att omkretsfunktionen är linjär och har konstant derivata. Detta sammanfattas i sambandet

$$\Delta C = 2\pi \Delta r.$$

I Problem 2 känner vi  $\Delta r$  och beräknar  $\Delta C$ , medan vi i Problem 1 känner  $\Delta C$  och söker  $\Delta r$ . Det är i grunden samma matematiska relation betraktad från två olika perspektiv.

<sup>2</sup> Enligt internationell standard är banbredden ofta 1,22 m, vilket ger ungefär 7,66 m per bana.

## 6 SAMMANFATTNING: NÄR MATEMATIKEN SLUTAR VÄRA LINJÄR

Vad händer när vi lämnar den linjära världen?

**Problem 3** Areaökning i den koncentriska cirkelmodellen. *Betrakta modellen med koncentriska cirklar i Figur 1. Anta att den yttre cirkeln har en area som är exakt  $1\text{ m}^2$  större än den inre cirkelns area. Hur stort blir detta avstånd  $h$ ?*

För att analysera fallet med areaökning omformulerar vi problemet. Vi låter cirkelns area ges av funktionen

$$A(r) = \pi r^2.$$

Vi vet att areaökningen är

$$\Delta A = 1,$$

och vi söker motsvarande förändring i radien  $\Delta r$  (vilket motsvarar  $h$  i modellen).

Till skillnad från det tidigare fallet är denna funktion inte linjär, och derivatan beror på  $r$ :

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

För små förändringar kan vi approximera areaändringen med den linjära delen:<sup>3</sup>

$$\Delta A \approx dA = 2\pi r dr = 2\pi r \Delta r.$$

Därmed får vi<sup>4</sup>

$$\Delta r \approx \frac{\Delta A}{2\pi r}.$$

I vårt fall är  $\Delta A = 1$ . För jorden sätter vi  $r = R$  och får därför

$$\Delta r \approx \frac{1}{2\pi R}.$$

Eftersom  $R$  är mycket stort (jordens radie) blir detta  $h = \Delta r$  ett extremt litet tal. Höjdskillnaden i modellen blir därför försumbar. Alltså motsvarar detta i praktiken alternativ **A**: inte ens en myra kan ta sig igenom glipan.

### En sista tankeställare: pizza-matematik

Tänk på en liten pizza (25 cm i diameter) och en stor familjpizza (50 cm i diameter). Den stora pizzan har dubbelt så stor radie, men eftersom arean växer kvadratisk blir den

$$2^2 = 4$$

gångar så stor. Om den stora pizzan kostar ungefär dubbelt så mycket får du alltså mer pizza per krona – ett exempel på icke-linjär (kvadratisk) tillväxt.

<sup>3</sup> Här används att  $dr = \Delta r$ ,  $dA = A'(r)dr$  och  $\Delta A \approx dA$  där  $dA$  är den första ordningens approximation av  $\Delta A$  för små förändringar i  $r$ .

<sup>4</sup> Man kan även få resultatet utan derivator genom en direkt beräkning. Skillnaden mellan två cirkelns area är

$$\Delta A = A(r + \Delta r) - A(r) = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2.$$

Eftersom  $\Delta r$  är mycket liten kan termen  $(\Delta r)^2$  försummas, vilket ger

$$\Delta A \approx 2\pi r \Delta r.$$

*I en uppföljande artikel (Liu, 2026), utforskar vi vad som händer om vi istället för att lyfta repet jämnt drar upp det i en enda punkt. Som vi ska se leder detta till en helt annan matematisk modell där jordens radie återigen spelar en avgörande roll.*

## REFERENCES

- Alder, K. (2003). *Världens mått : Berättelsen om hur metersystemet förändrade världen* (O. Hyllienmark, Trans.). Norstedt.
- Kafi, K., & Liu, W. (2024, March 14). *Affisch på -dagen 2024*. Retrieved March 14, 2024, from <https://wanminliu.github.io/doc/Pi-dagen2024.pdf>
- Liu, W. (2026, April 17). *Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre? — Tangentmodellen och kraften i ett enpunktslyft.*