Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre?
– Tangentmodellen och kraften i ett enpunktslyft

WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

25 apr 2026

1 FRÅN DET JÄMNA LYFTET TILL ETT ENPUNKTSLYFT

I den förra artikeln (Liu, 2026) undersökte vi vad som händer om repet runt jordens midja (ekvatorn) blir en meter längre och lyfts jämnt från marken runt hela jorden. Vi fann att höjden över marken blir ungefär 16 cm, ett resultat som är helt oberoende av jordens radie tack vare linjäriteten hos cirkelns omkrets [1]

Men vad händer om lyftet inte längre är jämnt?

Problem 1 Repet runt jorden (enpunktslyft). *Anta att jorden är ett perfekt klot med ekvatorns längd* 40 000 000 m*. Föreställ dig ett rep spänt runt jordens ekvator. Repet förlängs med exakt en meter. Repet ligger fortfarande tätt mot marken längs nästan hela ekvatorn. I en enda punkt lyfts repet rakt upp och sträcks så att det bildar två raka och symmetriska linjesegment som möts ovanför ekvatorn. Hur stor blir höjden h över jordytan i denna punkt?*

Till skillnad från det tidigare fallet är lyftet inte längre jämnt, och det är inte självklart att resultatet fortfarande är oberoende av jordens radie. För att analysera situationen behöver vi en mer lokal geometrisk modell.

För att illustrera idén börjar vi med ett enklare och mer välkänt geometriskt scenario: horisontproblemet.

Problem 2 Horisontproblem. *Anta att jorden är ett perfekt klot. Tänk dig att du befinner dig till havs en klar natt och ser ljuset från Kullens fyr. Fyrens ljuskälla befinner sig på en höjd av* 78,5 m *över havsytan. Hur långt bort kan en båt befinna sig och fortfarande precis se fyren?*

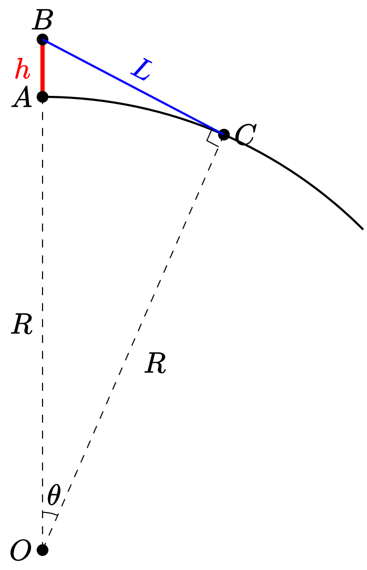
Detta leder till en geometrisk modell som vi nu formulerar mer exakt.

2 TANGENTMODELLEN: EN GEOMETRISK SIKTLINJE

För att analysera Problem 2 söker vi siktsträckan L, det vill säga hur långt bort en observatör kan befinna sig och fortfarande se ljuskällan.

Vi använder en lokal geometrisk modell där siktlinjen vid horisonten betraktas som en *tangent* till jordytan.

[1] Se (Liu, 2026) för en fördjupning i den koncentriska modellen.



Figur 1: $\triangle OCB$ är rätvinklig vid C.

I modellen bildar jordens centrum O, horisontpunkten C och ljuskällan B en rätvinklig triangel $\triangle OCB$, där vinkeln i C är rät eftersom radien står vinkelrät mot tangenten. I den rätvinkliga triangeln använder vi Pythagoras sats:

$$R^2 + L^2 = (R + h)^2.$$

Utvecklar vi högerledet får vi

$$R^2 + L^2 = R^2 + 2Rh + h^2.$$

Eftersom jordradien R är mycket stor jämfört med höjden h kan termen h^2 försummas, vilket ger approximationen

$$L \approx \sqrt{2Rh}.$$

Med $R = 40\,000\,000/(2\pi)$ och $h = 78{,}5$ får vi

$$L \approx 31\,600.$$

Detta ger svaret på Problem 2: en båt kan befinna sig ungefär 31,6 km bort och fortfarande precis se fyren.

3 Enpunktslyftet

Vi återvänder nu till Problem 1 och ser att det egentligen är samma geometriska modell som i Problem 2, se Figur 1. I båda fallen beskriver vi en cirkel där siktlinjen är tangent till jordytan.

I modellen är B den högsta punkten där repet lyfts. Från B sträcks repet tills det blir tangent till cirkeln i en punkt C. På grund av symmetri uppstår en motsvarande tangentpunkt på den andra sidan, men vi analyserar endast ena halvan av situationen.

Vi låter a beteckna skillnaden mellan den sträckta linjen och båglängden på ena sidan av cirkeln. Då blir $a = 0{,}5$ per sida.

Vi modellerar nu problemet lokalt med en cirkel med radie R och vinkel θ, enligt Figur 1.

Vårt mål är att uttrycka höjden h i termer av den givna extra längden a, för att sedan kunna bestämma hur högt repet lyfts i en enda punkt med hjälp av trigonometri.[2]

- Båglängden $AC = R\theta$.[3]
- Den sträckta linjen (tangenten) är $BC = L = R\tan\theta$.
- Den extra längden per sida blir därför

$$a = R\tan\theta - R\theta = R(\tan\theta - \theta) = 0{,}5.$$

- Höjden i punkten B ges av den geometriska relationen

$$h = OB - OA = \frac{R}{\cos\theta} - R = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right).$$

Målet är att utifrån de uttrycken för a och h, där båda beror på θ, eliminera vinkeln och därmed uttrycka höjden h direkt i termer längden a.

4 TAYLOR-SERIER: NÄR MATEMATIKEN BLIR ICKE-LINJÄR

Vi betraktar nu fallet då θ är liten. I denna situation kan vi använda Taylor-serier[4] för att approximera de icke-linjära uttrycken, vilket gör det möjligt att eliminera θ och uttrycka h i termer av a:

$$\tan\theta \approx \theta + \frac{\theta^3}{3}, \qquad \frac{1}{\cos\theta} \approx 1 + \frac{\theta^2}{2}.$$

Detta ger

$$a = R(\tan\theta - \theta) \approx R\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} - \theta\right) = \frac{R\theta^3}{3}, \qquad \Rightarrow \qquad \theta \approx \left(\frac{3a}{R}\right)^{1/3}.$$

Insatt i uttrycket för h får vi

$$h = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) \approx R\left(1 + \frac{\theta^2}{2} - 1\right) = \frac{R\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2}R^{1/3}(3a)^{2/3}.$$

Med $a = 0{,}5$ och jordens radie $R = 4\cdot 10^7/(2\pi)$ erhålls

$$h \approx 121.$$

Detta ger svaret på Problem 1: höjden är 121 m.

Den extra metern ger vid ett jämnt lyft bara 16 cm, men koncentrerad till en enda punkt räcker den för att nå 121 m – högre än en skyskrapa.

---

[2] Enligt definition gäller $\cos\theta = \frac{OC}{OB}$ och $\tan\theta = \frac{BC}{OC} = \frac{L}{R}$.

[3] Här mäts θ i radianer. Ett helt varv motsvarar 2π radianer. Eftersom en cirkels omkrets är $2\pi r$ kan en båglängd ses som den andel av hela varvet som vinkeln utgör: $\frac{\theta}{2\pi}\cdot 2\pi r = r\theta$.

[4] Taylor-serier är ett standardverktyg på universitetsnivå (första året). Idén är att approximera icke-linjära funktioner med polynom. När θ är liten bortser man från högre ordningens termer. Alternativt kan ekvationerna lösas numeriskt med programvara som GeoGebra, på samma sätt som i Avsnitt 5.

5 ETT EXPERIMENT MED DIN EGEN MIDJA

Vi testar nu samma geometriska modell i en mindre skala för att undersöka dess beteende när småvinkelapproximationen inte längre är giltig.

Problem 3. *Anta att kroppen (midjan) kan modelleras som en cirkel med omkrets* $1\,\mathrm{m}$. *Tänk dig att du lossar ett hål vid spännet på ett bälte så att det blir något längre. Bältet förlängs totalt med* $3\,\mathrm{cm}$, *vilket innebär att den extra längden per sida är* $a = 0{,}015$. *Hur högt kan bältet maximalt lyfta från kroppen i detta läge?*

Eftersom vinkeln inte längre är liten kan vi inte använda Taylor-approximationer. I stället måste problemet lösas numeriskt, vilket också visar att samma geometriska modell fortfarande gäller utanför småvinkelregimen. Vi använder därför **GeoGebra**.

1. Vi sätter (radien och den extra längden per sida):
$$R = \frac{1}{2\pi}, \qquad a = 0{,}015.$$
2. Vi löser ekvationen
$$R(\tan\theta - \theta) = a.$$
Numeriskt får vi $\theta \approx 0{,}62$ rad (cirka 35°).
3. Höjden beräknas därefter som
$$h = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) \approx 0{,}0366.$$

Detta motsvarar $0{,}0366\,\mathrm{m}$, det vill säga $3{,}66\,\mathrm{cm}$.

För att få en jämförelse kan vi ändå använda resultatet från Taylor-approximationen i Avsnitt 3:
$$h \approx \frac{1}{2} R^{1/3} (3a)^{2/3} \approx 0{,}0343.$$

Trots att småvinkelantagandet inte längre är giltigt ger detta en god intuition: bältets lyft är ungefär lika stort som dess förlängning.

6 SAMMANFATTNING: KRAFTEN I MODELLEN

Samma geometriska principer återkommer i andra sammanhang, t.ex. radiomaster och satellittäckning, där tangentmodellen beskriver hur jordens radie styr sikt- och räckvidd.

Jämfört med den koncentriska cirkelmodellen i den första artikeln ger tangentmodellen ett icke-linjärt samband där små förändringar inte ger proportionella effekter.

I dessa två artiklar har vi sett hur en extra meter kan ge olika effekter beroende på hur den fördelas:

- **Jämnt lyft: koncentrisk cirkelmodell.** Linjärt fall oberoende av jordens radie.
- **Enpunktslyft: tangentmodell.** Icke-linjärt fall där jordens radie förstärker effekten.

Matematisk modellering handlar därför om att välja rätt representation av verkligheten. I vissa fall är strukturen linjär och stabil, i andra fall gör radien att små förändringar kan förstoras dramatiskt.

REFERENCES

Liu, W. (2026, April 24). *Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre? — Det jämna lyftet och omkretsens linjäritet.*