

Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre?

Del 3. Från enpunktslyft till jämnt lyft: en resa mellan modeller

WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

20 aug 2026

I de två föregående artiklarna (Liu, 2026a, 2026b) har vi studerat två ytterligheter av samma problem. När repet runt jordens midja förlängs med en meter och lyfts i en enda punkt blir lyfthöjden ungefär 121 m. Om samma extra meter i stället fördelas jämnt runt hela jorden blir höjden bara cirka 16 cm.

Skillnaden mellan resultaten är dramatisk, men den väcker också en naturlig fråga: hur hänger de två modellerna ihop? Vad händer om vi inte går direkt från en enda lyftpunkt till ett jämnt lyft, utan successivt ökar antalet lyftpunkter? Kan vi på så sätt följa en väg från det spetsiga enpunktslyftet till den koncentriska cirkelmodellen för det jämna lyftet?

I den här artikeln undersöker vi denna övergång. Samtidigt använder vi problemet för att studera själva modelleringsprocessen. När ingen färdig modell finns behöver vi formulera rimliga antaganden, bygga en modell utifrån dem och sedan undersöka om modellen fortfarande är användbar när situationen förändras. Om ett antagande når sin gräns kan modellen behöva omprövas och ersättas av en annan.

Resan från enpunktslyft till jämnt lyft blir därför också en resa mellan matematiska modeller.

1 FYRMODELLEN ÅTERBESÖKT: FRÅN EN PUNKT TILL TVÅ

I den förra artikeln (Liu, 2026b) använde vi tangentmodellen för att analysera horisontproblemet. För en ljuskälla på höjden h fick vi siktsträckan

$$L = \sqrt{2Rh + h^2},$$

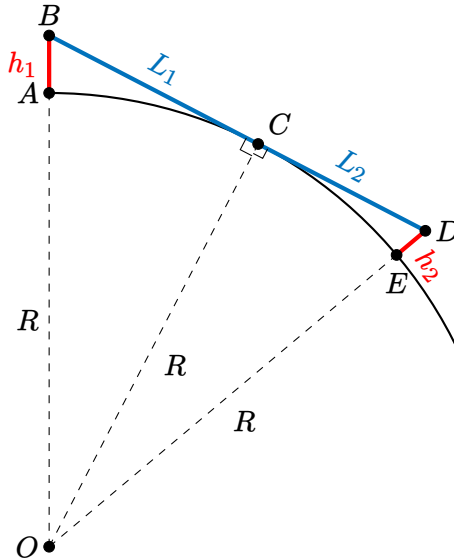
och eftersom h är mycket liten jämfört med jordens radie R kunde detta approximeras med

$$L \approx \sqrt{2Rh}.$$

I det problemet gjorde vi den förenklade modellen att observatörens ögon befann sig på havsytans nivå. Låt oss nu ändra just detta antagande.

Problem 1 Fyr och observatör. Anta att jorden är ett perfekt klot med ekvatorns längd 40000000 m. Anta att Kullens fyr har en ljuskälla på höjden 78,5 m

över havsytan. En observatör befinner sig i en båt till havs, och observatörens ögon befinner sig 15 m över havsytan. Hur långt från fyren kan observatören befinna sig och fortfarande precis se fyrljuset?



Figur 1: Två tangentmodeller möts i den gemensamma tangentpunkten C .

Vid första anblicken verkar detta vara ett nytt problem. I den tidigare modellen befann sig observatörens ögon på havsytans nivå. Nu befinner sig både fyrens ljuskälla och observatörens ögon ovanför havsytan.

Men behöver vi verkligen bygga en helt ny modell?

Nyckeln är återigen siktlinjen. När observatören precis kan se fyrljuset tangerar siktlinjen jordytan i punkten C . Det är samma geometriska egenskap som låg bakom tangentmodellen i den förra artikeln.

Som Figur 1 visar kan den välkända modellen nu användas från två håll.

Från fyrens ljuskälla B till tangentpunkten C har vi tangentmodellen med höjden h_1 . Den ger

$$L_1 \approx \sqrt{2Rh_1}.$$

Från observatörens ögon D till samma tangentpunkt C får vi motsvarande modell med höjden h_2 :

$$L_2 \approx \sqrt{2Rh_2}.$$

Det totala avståndet mellan fyren och observatören blir därför

$$L = L_1 + L_2.$$

Den nya modellen kräver alltså ingen ny geometrisk princip. Vi återanvänder samma tangentmodell två gånger och sätter samman de två delarna i den gemensamma tangentpunkten C .

Med längder angivna i meter har vi

$$R = \frac{40000000}{2\pi}, \quad h_1 = 78,5, \quad h_2 = 15.$$

Därmed får vi

$$L_1 \approx 31\,600, \quad L_2 \approx 13\,800, \quad L = L_1 + L_2 \approx 45\,400.$$

Observatören kan alltså befinna sig ungefär 45,4 km från fyren och fortfarande precis se fyrlyuset.

Det viktiga är hur modellen byggdes:

en tangentmodell + en tangentmodell $\longrightarrow$ en tvåpunktsmodell.

Detta är fortfarande ett speciellt tvåpunktsfall, eftersom de två delmodellerna möts i samma tangentpunkt. För repet runt jorden blir nästa fråga därför hur samma idé kan utvecklas när repet lyfts i flera punkter.

Hur kan vi bygga en modell med flera lyftpunkter genom att utgå från de modeller vi redan förstår?

2 FRÅN EN PUNKT TILL MÅNGA: EN FÖRSTA n -PUNKTSMODELL

Vi återvänder nu till repet runt jordens midja. I den första artikeln studerade vi det jämna lyftet, medan den andra artikeln behandlade enpunktslyftet. I föregående avsnitt såg vi dessutom hur en redan känd tangentmodell kunde återanvändas från två håll för att beskriva en ny situation. Det väcker frågan om samma idé kan användas även för repet: kan ett lyft i flera punkter byggas upp av flera kopior av den lokala modell som vi redan förstår?

Problem 2 Övergången mellan två modeller. *Anta att repet runt jordens ekvator fortfarande förlängs med exakt en meter. Vad händer om repet inte lyfts i en enda punkt och inte heller jämnt runt hela jorden, utan i flera punkter? Hur förändras lyfthöjden när antalet lyftpunkter ökar?*

Här uppstår ett typiskt modelleringsproblem. Problemformuleringen säger inte var lyftpunkterna ska ligga, om de ska nå samma höjd eller hur den extra replängden ska fördelas mellan dem. Informationen räcker alltså inte för att bestämma en unik matematisk modell. För att kunna gå vidare måste vi själva göra ytterligare antaganden.

Att formulera sådana antaganden betyder inte att vi får välja godtyckligt. Ett rimligt modellantagande bör utgå från problemets struktur och från det vi redan vet. Här finns framför allt två ledtrådar. Det ursprungliga problemet har en stark symmetri runt jorden, och från enpunktslyftet känner vi redan den lokala geometrin kring en lyftpunkt. Vi söker därför en så enkel modell som möjligt som bevarar dessa två egenskaper och samtidigt gör det möjligt att jämföra olika antal lyftpunkter.

Det leder till följande första antaganden.

Modellantagande

För ett lyft i n punkter antar vi att

1. lyftpunkterna är jämnt fördelade runt ekvatorn,
2. alla lyftpunkter når samma höjd h_n ,
3. geometrin kring varje lyftpunkt lokalt är densamma som i enpunktsmodellen: från lyftpunkten går två raka delar av repet som tangerar jordytan.

Dessa antaganden är alltså inte slutsatser som vi har bevisat. De är medvetna förenklingar som låter oss bygga en första modell. En viktig del av

modelleringen blir senare att undersöka om modellen ger rimliga resultat och hur länge antagandena kan vara giltiga när antalet lyftpunkter ökar.

Låt a_n beteckna skillnaden mellan längden av ett tangentsegment och den båglängd som segmentet ersätter. Vid varje lyftpunkt finns två sådana lika bidrag. Med n lyftpunkter får vi därför sammanlagt $2n$ lika bidrag till den extra replängden. Eftersom repet totalt är en meter längre gäller

$$2na_n = 1,$$

och alltså

$$a_n = \frac{1}{2n}.$$

Vi kan nu återanvända den matematiska modellen från enpunktslyftet. Om θ_n betecknar vinkeln i en av de lokala tangentmodellerna får vi

$$a_n = R(\tan \theta_n - \theta_n), \quad h_n = R \left(\frac{1}{\cos \theta_n} - 1 \right).$$

Tillsammans med villkoret för den extra replängden får vi vår första matematiska modell för ett n -punktslyft:

$$\begin{aligned} 2na_n &= 1, \\ a_n &= R(\tan \theta_n - \theta_n), \\ h_n &= R \left(\frac{1}{\cos \theta_n} - 1 \right). \end{aligned}$$

Modellen är nu byggd. Nästa steg är att lösa den och undersöka vad den förutsäger när n förändras. Eftersom

$$a_n = \frac{1}{2n}$$

blir den extra längden kring varje lyftpunkt mindre när n ökar. Den lokala vinkeln θ_n blir då också liten, vilket gör det naturligt att använda småvinkelapproximationen från den förra artikeln,

$$h \approx \frac{1}{2} R^{1/3} (3a)^{2/3}.$$

När vi sätter in

$$a = a_n = \frac{1}{2n}$$

får vi

$$h_n \approx \frac{1}{2} R^{1/3} \left(\frac{3}{2n} \right)^{2/3}.$$

Vi har därmed först byggt en modell utifrån våra antaganden och därefter approximativt löst den. Formeln gör det möjligt att undersöka hur lyfthöjden förändras när antalet lyftpunkter ökar. Men eftersom modellen bygger på antaganden som vi själva har infört måste resultaten också granskas: fortsätter modellen att ge en rimlig beskrivning när n blir mycket stort?

3 NÄR MODELLEN NÅR SIN GRÄNS

Låt oss nu undersöka vad vår första n -punktsmodell faktiskt förutsäger.

Ur formeln

$$h_n \approx \frac{1}{2} R^{1/3} \left(\frac{3}{2n} \right)^{2/3}$$

ser vi att

$$h_n \propto n^{-2/3}.$$

Lyfthöjden minskar alltså när antalet lyftpunkter ökar. Det verkar först rimligt: enpunktslyftet gav ungefär 121 m, och höjden bör minska när den extra metern fördelas på allt fler punkter.

Men om denna modell ska beskriva en övergång mot det jämna lyftet borde höjden så småningom närma sig resultatet från den första artikeln,

$$h = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16,$$

det vill säga ungefär 16 cm. Vår n -punktsmodell ger däremot

$$h_n \rightarrow 0 \quad \text{när} \quad n \rightarrow \infty.$$

Detta är en varningssignal: modellen tycks inte kunna beskriva övergången hela vägen till det jämna lyftet. Problemet ligger knappast i småvinkelapproximationen, eftersom

$$a_n = \frac{1}{2n}$$

och därmed även θ_n blir mindre när n ökar. Approximationen blir alltså snarare bättre.

Vi behöver därför granska själva geometrin. Hur länge kan de lokala kopiorna av enpunktsmodellen egentligen få plats runt hela jorden?

4 DEN KRITISKA PUNKTEN

I den förra artikeln (Liu, 2026b) visade vi att sambandet mellan den extra längden a och vinkeln θ , för små vinklar, kan approximeras med

$$\theta \approx \left(\frac{3a}{R} \right)^{1/3}.$$

I vår n -punktsmodell är

$$a_n = \frac{1}{2n},$$

och därför får vi

$$\theta_n \approx \left(\frac{3}{2nR} \right)^{1/3}.$$

Nu måste vi också ta hänsyn till hur de lokala tangentmodellerna tillsammans får plats runt hela ekvatorn. Kring varje lyftpunkt finns två vinklar θ_n , en på vardera sidan. Med n lyftpunkter får vi alltså sammanlagt $2n$ sådana vinklar.

Så länge de lokala tangentmodellerna inte överlappar varandra måste deras sammanlagda vinkel vara högst ett helt varv:

$$2n\theta_n \leq 2\pi.$$

Detta villkor visar något som inte syntes när vi studerade en enda lyftpunkt. När n ökar tar de lokala tangentmodellerna tillsammans upp en allt större del av cirkeln. Förr eller senare når vi därför ett gränsfall.

Den kritiska situationen uppstår när hela varvet precis är fyllt:

$$2n\theta_n = 2\pi,$$

det vill säga

$$\theta_n = \frac{\pi}{n}.$$

Geometriskt betyder detta att tangentsegmenten från intilliggande lyftpunkter precis möter varandra. De bågar där repet tidigare låg kvar mot jordytan har då just försvunnit, och hela repet består av räta tangentsegment.

Här uppstår en ny geometrisk figur på ett naturligt sätt. Tangentsegmenten bildar tillsammans en *regelbunden n -hörning* som omskriver jordens cirkulära tvärsnitt. Den omskrivna regelbundna månghörningen är alltså inte ett nytt antagande som vi inför utifrån, utan gränsfallet för den n -punktsmodell som vi redan har byggt.

Vid den kritiska punkten gäller

$$\left(\frac{3}{2nR}\right)^{1/3} \approx \frac{\pi}{n},$$

och därmed

$$n_{\text{krit}} \approx \sqrt{\frac{2\pi^3 R}{3}} \approx 11\,470.$$

För små vinklar visade vi i den förra artikeln (Liu, 2026b) att

$$h \approx \frac{R\theta^2}{2}.$$

Vid den kritiska punkten har vi

$$\theta_n \approx \frac{\pi}{n_{\text{krit}}},$$

och därför blir höjden

$$h_{\text{krit}} \approx \frac{R}{2} \left(\frac{\pi}{n_{\text{krit}}}\right)^2 \approx 0,239,$$

det vill säga cirka 24 cm.

Vi kan nu tolka den kritiska punkten geometriskt. Före det kritiska värdet finns det fortfarande bågar mellan tangentsegmenten där repet ligger mot jordytan. Vid det kritiska värdet har dessa bågar precis försvunnit och repet bildar en omskriven regelbunden månghörning. Om antalet lyftpunkter ökas ytterligare kan de lokala tangentmodellerna inte längre sättas samman på samma sätt utan att överlappa varandra.

Den första n -punktsmodellen kan alltså inte fortsätta hela vägen mot $n \rightarrow \infty$. Men just när modellen når sin gräns har geometrin samtidigt gett oss en ny idé: repet har blivit en regelbunden månghörning runt jorden. Denna figur blir utgångspunkten för nästa modell.

5 FRÅN REGELBUNDEN MÅNGHÖRNING TILL CIRKEL

Om vi fortsätter att öka antalet lyftpunkter kan vi inte längre kräva att varje del av repet ska vara tangent till jordytan. Tangentvillkoret har nått sin gräns och måste överges.

Däremot kan vi behålla andra delar av modellen: lyftpunkterna är fortfarande jämnt fördelade, de ligger på samma höjd och repet totala längd är fortfarande en meter större än jordens omkrets. I den nya modellen behåller vi därför den regelbundna månghörningen, men släpper kravet att dess sidor ska tangera jordytan.

Vi förändrar alltså inte hela modellen på en gång. Vi behåller de antaganden som fortfarande är användbara och ersätter det antagande som inte längre kan gälla.

När antalet hörn ökar blir varje sida kortare och månghörningen allt rundare. Skillnaden mellan de enskilda lyftpunkterna blir gradvis mindre betydelsefull. Det som började som ett diskret lyft i ett antal bestämda punkter övergår på så sätt mot ett jämnt lyft runt hela jorden.

I gränsen närmar sig den regelbundna månghörningen en cirkel. Då återkommer den koncentrisk cirkelmodellen från den första artikeln (Liu, 2026a). Repet ligger på en konstant höjd över jordytan, och den extra metern ger åter

$$h = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16,$$

det vill säga ungefär 16 cm.

Det viktiga här är inte någon ny beräkning, utan hur modellen förändras. Vi försöker inte tvinga tangentmodellen att fungera längre än dess geometriska antaganden tillåter. När modellen når sin gräns behåller vi de delar som fortfarande är användbara och bygger vidare med en ny representation.

Den matematiska resan började med ett enpunktslyft på ungefär 121 m. När antalet lyftpunkter ökade gick vi från lokala tangentmodeller till en regelbunden månghörning och därifrån vidare mot den koncentrisk cirkeln för det jämna lyftet.

Det mest intressanta resultatet är därför kanske inte 121 m eller 16 cm var för sig. Det är den modellresa som förbinder dem.

REFERENSER

- Liu, W. (2026a). [Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre? Del 1. Det jämna lyftet: omkretsens linjäritet.](#) *Nämnaren*, 2026(3), 55–59.
- Liu, W. (2026b). [Vad händer om repet runt jordens midja blir en meter längre? Del 2. Enpunktslyftet: tangentmodellen och det icke-linjära sambandet.](#)