Den otroliga sanningen om π: Varför en meter gör skillnad för både jorden och katten

WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

2 apr 2026

1 HUR METERN UPPSTOD: EN RESA GENOM HISTORIEN

Under den franska revolutionen i slutet av 1700-talet fanns en vision om att skapa ett universellt måttsystem "för alla folk, för all tid". Astronomerna Delambre och Méchain ägnade sju år åt att mäta meridianen mellan Dunkerque och Barcelona under krig och kaos. Man fastställde att **en meter** skulle motsvara exakt en tiomiljondel av avståndet från ekvatorn till nordpolen längs Paris-meridianen.

Om vi utgår från denna definition kan vi dra en fascinerande slutsats: Om avståndet från ekvatorn till polen är 10 000 000 meter (en fjärdedel av jordens omkrets), måste hela jordens omkrets (om vi antar att den är ett perfekt klot) vara exakt **40 000 000 meter**, det vill säga **40 000 kilometer**.

2 ETT KONTRAINTUITIVT TANKEEXPERIMENT

Med utgångspunkt i denna enorma omkrets på 40 000 km, som vi precis härledde från meterns definition, kan vi ställa oss en fråga som utmanar vår intuition (Kafi & Liu, 2024). Föreställ dig att vi lägger ett rep tätt längs hela jordens ekvator.

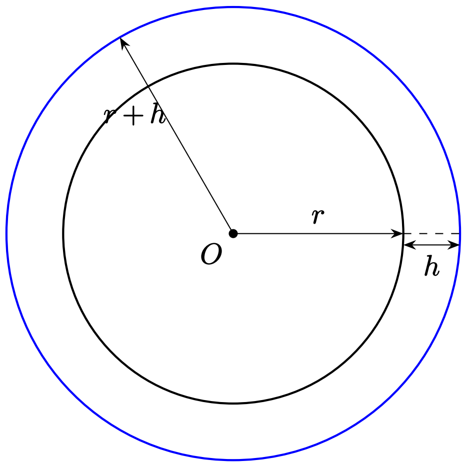
Om vi nu förlänger detta enorma rep med endast **en meter** och lyfter det jämnt från marken så att det bildas ett gap (h) hela vägen runt jorden, hur stort blir då detta avstånd? Vilken av följande beskrivningar verkar mest rimlig:

- **A. Höjden från marken är för kort, inte ens en myra kan ta sig igenom gapet.**
- **B. Höjden från marken är för lång, kan då en katt ta sig igenom gapet.**

3 DEN MATEMATISKA MODELLEN: DE KONCENTRISKA CIRKLARNA

För att lösa gåtan behöver vi återvända till grunderna i geometri och talet π. Vi minns att förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess radie alltid är ett konstant värde, nämligen 2π. Detta är själva definitionen av π: $2\pi =$ omkrets/radie.

Låt oss nu visualisera problemet med hjälp av två **koncentriska cirklar** – det vill säga två cirklar som har exakt samma mittpunkt:



Figur 1: Jorden (r) och det förlängda repet (r + h)

1. **Den inre cirkeln:** Representerar jordens yta med omkretsen $C = 40\,000\,000$ meter och radien r.
2. **Den yttre cirkeln:** Representerar det förlängda repet. Dess omkrets är $C + 1$ meter och dess radie är $r + h$, där h **är gapet (höjden)**.

Matematiskt ställer vi upp det så här:

$$2\pi(R+h) = C+1$$

$$2\pi R + 2\pi h = 2\pi R + 1$$

Eftersom $2\pi R = C$, kan vi förenkla ekvationen genom att ta bort C från båda sidor. Kvar blir den enkla relationen: $2\pi h = 1$

Detta ger oss $h = 1/(2\pi) \approx 0,16$ meter. Om vi avrundar π till 3 blir höjden ungefär 1/6 meter, vilket är ca **17 centimeter**. Det betyder att svaret faktiskt är **B** – en katt kan absolut smyga under repet! Det mest fascinerande är att jordens radie (R) helt försvann ur ekvationen. Samma sak skulle hända om vi lade ett snöre runt en liten **Pi-tårta**.

4 Den djupare sanningen: Linjäritet och derivatans kraft

Varför hände detta? Svaret ligger i ett av matematikens mest fundamentala begrepp – **linjäritet**. Omkretsen är en linjär funktion av radien: $C(r) = 2\pi r$. För en sådan linje är lutningen alltid densamma.

Vi kan använda **derivatan** för att förstå denna förändringstakt [1]:

$$\frac{dC}{dr} = 2\pi$$

[1] I detta linjära fall behöver vi inte skilja på den faktiska ändringen (ΔC) och den matematiska differentialen (dC). Eftersom lutningen är konstant, är ΔC **alltid exakt lika med** dC.

Detta talar om för oss att förändringstakten är konstant. Om vi ökar omkretsen med $dC = 1$, blir radieökningen $dr = 1/(2\pi)$. Denna insikt förklarar att i en linjär värld är **förändringen oberoende av startpunkten**. Det är därför din Pi-tårta och planeten jorden lyder under exakt samma regler.

5 HEMLIGHETEN BAKOM LÖPARBANAN: MATEMATIK I PRAKTIKEN

Detta förklarar något vi ser på idrottsplatsen: en **400-meters löparbana**. Om vi klipper bort raksträckorna (som är lika långa för alla) bildar kurvorna **koncentriska cirklar**.

Eftersom varje bana brukar vara ungefär 1 meter bred ($dr = 1$), blir skillnaden i längd för ett helt varv:

$$dC = 2\pi \cdot dr \approx 6,28 \text{ meter}$$

För att alla ska springa exakt lika långt måste löparna i de yttre banorna ha förskjutna startlinjer. Enligt internationell standard är banbredden ofta $1,22$ meter, vilket ger en skillnad på ca $7,66$ meter per bana.

6 SAMMANFATTNING: NÄR MATEMATIKEN SLUTAR VARA LINJÄR

Vad händer när vi lämnar den linjära världen? Här återvänder vi till vår modell med de **koncentriska cirklarna**. Denna gång låter vi den **inre cirkeln vara jordens ekvator** (med omkretsen 40 000 000 meter). Vi tänker oss sedan en yttre koncentrisk cirkel.

Istället för att ändra omkretsen, antar vi nu att **skillnaden i area mellan dessa två cirklar är exakt 1 kvadratmeter**. Frågan är: vad blir avståndet (avståndsskillnaden) mellan den inre och den yttre cirkeln?

Till skillnad från omkretsen är arean $A(r) = \pi r^2$ en **kvadratisk funktion** av r. Om vi använder derivatan $dA/dr = 2\pi r$ för att förstå förändringstakten, ser vi att avståndet (dr) beror på startradien:

$$dr = \frac{dA}{2\pi r}$$

Eftersom jordens omkrets ($2\pi r$) är hela 40 000 000 meter, blir avståndet dr extremt litet när $dA = 1$ [2]:

$$dr = \frac{1}{40\,000\,000} \text{ meter} = 0,000\,000\,025 \text{ meter}$$

Detta resultat är så mikroskopiskt att vi nu är tillbaka vid **Alternativ A**. Inte ens en myra skulle kunna ta sig igenom ett så litet gap.

En sista tankeställare: Pizza-matematik
Denna kvadratiska egenskap möter du ofta när du beställer pizza. Tänk på en

[2] **Matematisk fördjupning:** För elever som är nyfikna på rigorös matematik kan vi se på det så här. Den faktiska skillnaden är $\Delta A = \pi(r+h)^2 - \pi r^2 = 2\pi rh + \pi h^2$. Differentialen dA definieras som $A'(r)dr$, vilket ger $dA = 2\pi r dr$. Om vi sätter $dr = h$, ser vi att dA utgör den **linjära delen** av den totala förändringen. Eftersom jordens radie r är så enorm ($6,37 \times 10^6$ m), blir termen πh^2 försumbar i jämförelse med $2\pi rh$. Vi kan därför använda $dA \approx \Delta A = 1$.

liten pizza (25 cm diameter) och en stor (50 cm diameter). Den stora pizzan har dubbelt så stor radie. **Utmaning:** Om radien fördubblas, blir arean $2^2 = 4$ gånger så stor. Om den stora pizzan bara kostar dubbelt så mycket som den lilla, hur mycket "gratis" pizza får du egentligen?

REFERENCES

Kafi, K., & Liu, W. (2024, March 14). *Affisch på -dagen 2024*. Retrieved March 14, 2024, from https://wanminliu.github.io/doc/Pi-dagen2024.pdf