

HT25 Avstämning 1 - Potens och Algebra

Wanmin Liu

20251017

Matematik nivå 1b.

Del A: Digitala verktyg är inte tillåtna.

1. Förenkla uttrycket och skriv som en potens.

a) $\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^4} = 3^{3+5-4} = 3^4.$

b) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^3 = (5^{-2})^3 = 5^{-2 \cdot 3} = 5^{-6}.$

b) Alternativ: $\left(\frac{1}{5^2}\right)^3 = \left(\frac{1}{25}\right)^3 = 25^{-3}.$

2. Förenkla uttrycken.

a) $\frac{x^2}{x^6} = x^{2-6} = x^{-4}.$

b) $x^{-5} \cdot x^4 = x^{-5+4} = x^{-1}.$ Vi kan också skriva det som $\frac{1}{x}.$

c) $a^8 \cdot \frac{a}{a^4} = \frac{a^8 \cdot a}{a^4} = \frac{a^9}{a^4} = a^{9-4} = a^5.$

3. Utveckla och förenkla.

a)

$$\begin{aligned} & 4 + (2x - 5)(10 + 3x) \\ &= 4 + (2x \cdot 10 + 2x \cdot 3x - 5 \cdot 10 - 5 \cdot 3x) \\ &= 4 + 20x + 6x^2 - 50 - 15x \\ &= 6x^2 + 5x - 46. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& (x+7) - (5x+8)(4-7x) \\
= & (x+7) - (5x \cdot 4 - 5x \cdot 7x + 8 \cdot 4 - 8 \cdot 7x) \\
= & (x+7) - (20x - 35x^2 + 32 - 56x) \\
= & (x+7) - (-35x^2 - 36x + 32) \\
= & x + 7 + 35x^2 + 36x - 32 \\
= & 35x^2 + 37x - 25.
\end{aligned}$$

4. Beräkna och svara i grundpotensform.

Ett tal i grundpotensform om det är av formen $a \cdot 10^b$ med $1 \leq a < 10$ och b är ett heltal.

$$\begin{aligned}
\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 10^6} &= \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{10^{-2} \cdot 10^{20}}{10^6} \\
&= 15 \cdot 10^{-2+20-6} \\
&= 15 \cdot 10^{12} && (15 \text{ är mer än } 10) \\
&= 1,5 \cdot 10 \cdot 10^{12} \\
&= 1,5 \cdot 10^{1+12} \\
&= 1,5 \cdot 10^{13}.
\end{aligned}$$

5. Lös ekvationerna och svara exakt.

a)

$$\begin{aligned}
6x - 10 &= 2x + 26 \\
4x - 10 &= 26 \\
4x &= 36 \\
x &= 9.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
3(2x + 1) - 1 &= 4x + 3 \\
6x + 3 - 1 &= 4x + 3 \\
6x + 2 &= 4x + 3 \\
2x + 2 &= 3 \\
2x &= 1 \\
x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alternativ $x = 0,5$.

c)

Metod 1. Vi kan använda reglerna för addition och subtraktion av bråk och tekniken för att hitta en gemensam nämnare.

Metod 2. Vi kan multiplicera båda sidor av ekvationen med talet 6, vilket är en gemensam multipel av nämnarna. Detta omvandlar en ekvation som innehåller bråk till en utan.

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{2} - \frac{2x+1}{3} &= 6 \\ 6 \cdot \left(\frac{x-3}{2} - \frac{2x+1}{3} \right) &= 6 \cdot 6 \\ 6 \cdot \frac{x-3}{2} - 6 \cdot \frac{2x+1}{3} &= 6 \cdot 6 \\ 3(x-3) - 2(2x+1) &= 36 \\ 3x - 9 - 4x - 2 &= 36 \\ -x - 11 &= 36 \\ -x &= 47 \\ (-1) \cdot (-x) &= (-1) \cdot 47 \\ x &= -47.\end{aligned}$$

6. Lös ekvationerna.

a)

$$\begin{aligned}2^{3x} \cdot 2^4 &= 2^{11x} \\ 2^{3x+4} &= 2^{11x} \\ 3x + 4 &= 11x \\ 4 &= 8x \\ 8x &= 4 \\ x &= \frac{4}{8} \\ x &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alternativ $x = 0,5$.

b)

$$\begin{aligned}2^6 \cdot 9^{2x} &= 4^3 \cdot 3^{12} \\ 2^6 \cdot (3^2)^{2x} &= (2^2)^3 \cdot 3^{12} \\ 2^6 \cdot (3)^{2 \cdot 2x} &= (2)^{2 \cdot 3} \cdot 3^{12} \\ 2^6 \cdot (3)^{4x} &= (2)^6 \cdot 3^{12} \\ (3)^{4x} &= 3^{12} \\ 4x &= 12 \\ x &= 3.\end{aligned}$$

7. Vilket tal är störst, 9^{180} eller 4^{240} ?

För att jämföra två tal kan vi skriva dem med samma exponent men olika baser.

Vi observerar att $180 = 3 \cdot 60$ och $240 = 4 \cdot 60 = 2 \cdot 120$.

Vi har

$$9^{180} = (3^2)^{180} = 3^{2 \cdot 3 \cdot 60} = (3^3)^{2 \cdot 60} = 27^{120}.$$

Vi har också

$$4^{240} = (4)^{2 \cdot 120} = (4^2)^{120} = (16)^{120}.$$

Eftersom $27 > 16$, har vi $27^{120} > 16^{120}$. Det betyder att $9^{180} > 4^{240}$.

Del B: Digitala verktyg är tillåtna.

8. Problemlösning.

Annika, Anne-Mi och Jan ska skapa 17 matteuppgifter till ett prov. De fördelar det så att Anne-Mi gör dubbelt så många som Annika och Jan gör 3 färre uppgifter än Annika.

a) Ställ upp en ekvation som beskriver situationen.

b) Ta reda på hur många uppgifter var och en gör.

Lösning.

a)

(**Variabel**) Anta att Annika gör x uppgifter.

(**Uttryck**) Då gör Anne-Mi $2x$ uppgifter. Jan gör $(x - 3)$ uppgifter.

(**Ekvation**) Vi får ekvation

$$x + 2x + (x - 3) = 17.$$

b)

(**Lös ekvationen**) Vi löser ekvationen med *balansmetod*.

$$x + 2x + (x - 3) = 17$$

$$x + 2x + x - 3 = 17$$

$$4x - 3 = 17$$

$$4x = 20$$

$$x = 5.$$

Svar. Annika gör 5 uppgifter. Anne-Mi gör 10 uppgifter. Jan gör 2 uppgifter.

9. Förenkla så långt som möjligt $(-2x)^3 \cdot (-x^5)^4$

Lösning.

$$\begin{aligned}(-2x)^3 \cdot (-x^5)^4 &= (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (-1)^4 \cdot (x^5)^4 \\&= -8 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot x^{5 \cdot 4} \\&= -8 \cdot x^{3+20} \\&= -8x^{23}.\end{aligned}$$

10. Skriv $\frac{8^2 \cdot (2^{-3})^2 \cdot 4^{12}}{16 \cdot 2^{12}}$ som en potens med basen 2.

Lösning.

$$\begin{aligned}\frac{8^2 \cdot (2^{-3})^2 \cdot 4^{12}}{16 \cdot 2^{12}} &= \frac{(2^3)^2 \cdot (2^{-3})^2 \cdot (2^2)^{12}}{2^4 \cdot 2^{12}} \\&= \frac{2^{3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 12}}{2^{4+12}} \\&= \frac{2^{24}}{2^{16}} \\&= 2^{24-16} \\&= 2^8.\end{aligned}$$

Alternativ metod. Man kan observera att

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Då blir

$$8^2 \cdot (2^{-3})^2 = 8^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\frac{8^2 \cdot (2^{-3})^2 \cdot 4^{12}}{16 \cdot 2^{12}} &= \frac{1 \cdot (2^2)^{12}}{2^4 \cdot 2^{12}} \\&= \frac{2^{2 \cdot 12}}{2^{4+12}} \\&= \frac{2^{24}}{2^{16}} \\&= 2^{24-16} \\&= 2^8.\end{aligned}$$

11. Problemlösning.

Clara, Sofi, Kristin och Maud har samlat ihop pant efter en fest. De fick lov att spara pengarna för all pant de själva hade samlat ihop.

Clara fick 20 kr mer än Sofi, Kristin fick hälften så mycket som Clara och Maud fick ihop fem fjortondelar av det Sofi fick ihop. Clara och Maud fick tillsammans lika mycket som Sofi och Kristin fick ihop.

Hur mycket pengar fick **Clara**?

Lösning.

(**Variabel**) Anta att Clara fick x kr.

(**Uttryck**) Då fick Sofi $x - 20$ kr.

Kristin fick $\frac{x}{2}$ kr.

Maud fick $\frac{5}{14} \cdot (x - 20)$ kr.

(**Ekvation**) Eftersom Clara och Maud fick tillsammans lika mycket som Sofi och Kristin fick ihop får vi ekvation

$$x + \frac{5}{14} \cdot (x - 20) = x - 20 + \frac{x}{2}.$$

(**Lös ekvationen**) Vi löser ekvationen med *balansmetod*.

$$\begin{aligned}x + \frac{5}{14} \cdot (x - 20) &= (x - 20) + \frac{x}{2} \\14 \cdot \left(x + \frac{5}{14} \cdot (x - 20)\right) &= 14 \cdot \left((x - 20) + \frac{x}{2}\right) \\14 \cdot x + 14 \cdot \frac{5}{14} \cdot (x - 20) &= 14 \cdot (x - 20) + 14 \cdot \frac{x}{2} \\14x + 5 \cdot (x - 20) &= 14 \cdot (x - 20) + 7 \cdot x \\14x + 5x - 100 &= 14x - 14 \cdot 20 + 7x \\5x - 100 &= 7x - 280 \\-100 &= 2x - 280 \\280 - 100 &= 2x \\180 &= 2x \\90 &= x \\x &= 90.\end{aligned}$$

Svar. Clara fick 90 kr.

Metod 2

(**Variabel**) Vi antar att Sofi fick y kr.

(**Uttryck**) Då fick Clara $y + 20$ kr.

Kristin fick $\frac{y+20}{2}$ kr.

Maud fick $\frac{5}{14} \cdot y$ kr.

(**Ekvation**) Eftersom Clara och Maud fick tillsammans lika mycket som Sofi och Kristin fick ihop får vi ekvation

$$(y + 20) + \frac{5}{14} \cdot y = y + \frac{y + 20}{2}.$$

(**Lös ekvationen**) Det är en bra övning att lösa ekvationen med *balansmetod*.

Vi får $y = 70$.

Så fick Clara $y + 20 = 70 + 20 = 90$ kr.

Svar. Clara fick 90 kr.

12. Ordna talen i storleksordning med det minsta först. Motivera ditt svar.

$$2^{500}, \quad 8^{200}, \quad 16^{100}, \quad 6^{300}.$$

Metod 1.

Vi skriver om alla tal med exponenten 100 och olika baser.

$$2^{500} = 2^{5 \cdot 100} = (2^5)^{100} = 32^{100}.$$

$$8^{200} = 8^{2 \cdot 100} = (8^2)^{100} = 64^{100}.$$

$$6^{300} = 6^{3 \cdot 100} = (6^3)^{100} = 216^{100}.$$

Eftersom

$$0 < 16 < 32 < 64 < 216$$

har vi

$$16^{100} < 32^{100} < 64^{100} < 216^{100},$$

dvs

$$16^{100} < 2^{500} < 8^{200} < 6^{300}.$$

Metod 2.

Vi skriver om 2^{500} , 8^{200} , 16^{100} med basen 2.

$$8^{200} = (2^3)^{200} = 2^{3 \cdot 200} = 2^{600}.$$

$$16^{100} = (2^4)^{100} = 2^{4 \cdot 100} = 2^{400}.$$

Vi har

$$2^{400} < 2^{500} < 2^{600},$$

dvs

$$16^{100} < 2^{500} < 8^{200}.$$

Nu jämför vi med 2^{600} och 6^{300} .

$$2^{600} = 2^{2 \cdot 300} = (2^2)^{300} = 4^{300} < 6^{300},$$

dvs

$$8^{200} < 6^{300}.$$

Så får vi slutsatsen

$$16^{100} < 2^{500} < 8^{200} < 6^{300}.$$