Andragradsekvation

Wanmin Liu. 20251105 Ma2b

1. Diskriminant och antal lösningar till en andragradsekvation

Faktum: för vilket reellt tal t som helst har vi alltid $t^2 = t \cdot t \geq 0$.

Tecken $\pm$ betyder: $+$ **ELLER** $-$.

Definition av kvadratrot

- Om $a > 0$ definieras kvadratroten ur a som **det positiva talet** (skrivs $\sqrt{a}$) vars kvadrat är a, dvs $\sqrt{a} > 0$ och $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. T.ex $\sqrt{4} = 2$.
- Om $a = 0$ defineras $\sqrt{a} = \sqrt{0} = 0$.
- Om $a < 0$ saknar $\sqrt{a}$ betydelse som reellt tal. T.ex Kvadratroten ur -1, $\sqrt{-1}$ har ingen betydelse som ett reellt tal eftersom för vilket reellt tal t som helst har vi alltid $t \cdot t \geq 0$.

Exempel. Lös ekvationerna (a) $(x-1)^2 = 4$, (b) $(x-1)^2 = 0$ och (c) $(x-1)^2 = -1$.

Andragradsekvation i pq-form och lösningar.

$$x^2 + px + q = 0.$$

Hur kan man lösa ekvationen? Formelblad

$$x = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Antalet lösningar till en andragradsekvation beror på uttrycket $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Det är uttrycket under rottecken i formelblad. Vi ger detta uttryck ett namn: **diskriminant** (i pq-formen). Vi kan se direkt hur många lösningar **utan att lösa ekvationen**.

Diskriminant och antal lösningar till en andragradsekvation.

- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, finns två reella lösningar.
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, finns en enda reell lösning.

- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, finns ingen reell lösning.

Uppgift S.56: 2218, 2219, 2220, 2223, 2224.

2. Grafers skärningspunkter och ekvationssystem

Graf av funktionen $y = f(x)$ är alla punkter (x, y) som uppfyller $y = f(x)$, dvs $(x, f(x))$ för alla x i definitionsmängden.

Exempel: Grafen av funktion $y = kx + m$ är en linje med lutningen k och skärningspunkten på y-axeln med koordinaten $(0,\ m)$. Varje punkt på linjen har koordinaten $(x,\ f(x)) = (x,\ kx + m)$.

Exempel: Grafen av andragradfunktion $y = f(x) = x^2 + px + q$ är en parabel pekar uppåt, dvs en glad mun.

Vad är skärningspunkter mellan grafer till $y = f(x)$ och $y = g(x)$?

Skärningspunkterna är de punkter (x, y) som ligger **på båda graferna samtidigt**.

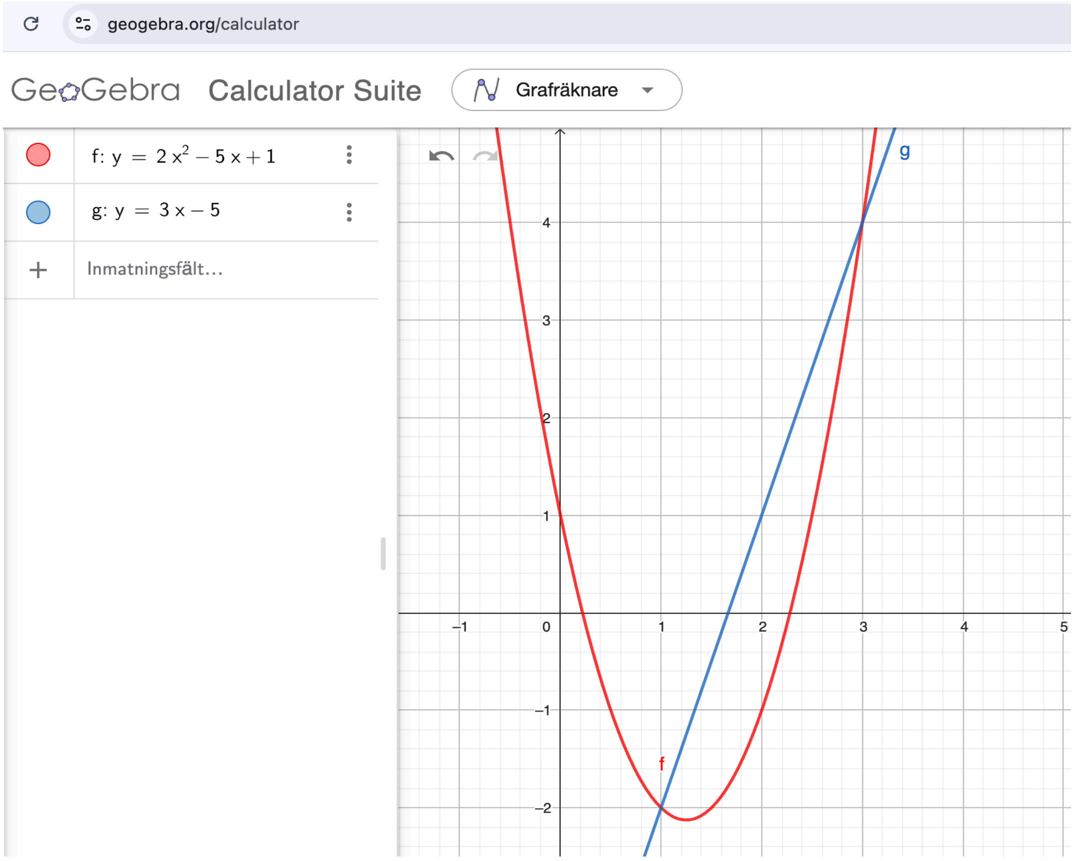
Det betyder att både $y = f(x)$ och $y = g(x)$ gäller för samma x-värde. Alltså måste $f(x) = g(x)$. Vi kan lösa ekvationen $f(x) = g(x)$ och får de x-värden där graferna möts.

Vi kan också representera skärningspunkterna med hjälp av ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Exempel: Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln $y = 2x^2 - 5x + 1$ och den räta linjen $y = 3x - 5$.

Metod 1. Grafisk metod. Antag att vi har grafer.



Vi hittar två skärningspunkter $(1, \ -2)$ och $(3, \ 4)$.

Metod 2. Algebraisk metod. Vi använder substitution.

Svar. De två skärningspunkterna är $(1, \ -2)$ och $(3, \ 4)$.

Samma matematik i fyra aspekter av tolkningar.

1. **Nollställena** till funktionen $y = f(x)$.
2. Lösningar till ekvationen $f(x) = 0$.
3. Skärningspunkten mellan funktionens graf och x-axeln.
4. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Geometriförklaring av diskriminant, återbesökt.

Grafen för

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

är en glad mun (en parabel som öppnar sig uppåt).

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = 0 \end{cases}$$

Diskriminanten avgör om parabeln skär x-axeln.

- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, skär parabeln x-axeln i två punkter.
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ skär parabeln x-axeln endast i en punkt (och tangerar den).
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ skär parabeln x-axeln inte i några punkter och ligger ovanför x-axeln.

Uppgift S.101: 3312,3313, 3315, (3318).