Extremvärdsproblem

Wanmin Liu

20251023

Ma3c

Planering.

Pass 1.

- Leksaksmodell och två metoder för att bestämma det extrem värdet. 5 min.
- Diskutera likheter och skillnader i par mellan Uppgifterna 4253 och 4251. 5 min.
- Gå igenom detaljerna för 4253. Två olika metoder. 10 min.
- Läs Ma3c-Np-vt-2014-25. 5 min. (projicera till tavlan)
- Diskutera likheter och skillnader mellan Uppg. 4253 och Ma3c-Np-vt-2014-25. 5 min.
- **Tips**. Rita tre punkter A, P, B i bilden.
- Elever kör Ma3c-Np-vt-2014-25 individuellt. 20 min.
- Om några elever klarar detta kan de göra uppgiften Np-2020-Peking.
- Sista 10 min. Vi tittar på lösningar av Ma3c-Np-vt-2015-25. (projicera till tavlan)

Pass 2.

- Läs Ma3c-Np-ht-2014-21. 5 min. (projicera till tavlan)
- Diskutera i par: Vad är volymen $V(x)$ som en funktion av x? 3 min. Vi skriver $V(x)$ på tavlan.
- Elever kör Ma3c-Np-ht-2014-21 individuellt. 20 min.
- Vi tittar på lösningar av Ma3c-Np-ht-2014-21. 5 min. (projicera till tavlan)
- Aktivitet i Matematik Origo: Vilken volym är störst? Säg till eleven att de inte behöver göra funktionsvärdetabellen. **Tips**. Rita i tavlan. Vad är volymen $V(x)$ som en funktion av x? 5 min
- Elever kör aktivitet till slut av Pass 2.

Pass 1.

Tänk genom att använda leksaksmodellen.

Kom bara ihåg **leksaksmodell**.

- $y = f(x) = x^2$ har **minsta** värdet på $x = 0$. $f'(x) = 2x$. Tecknet nära $x = 0$ för $f'(x)$ har formen: $-\ 0\ +$. $f''(x) = 2 > 0$. Vi har $f'(0) = 0$ och $f''(0) > 0$.
- $y = g(x) = -x^2$ har **största** värdet på $x = 0$. $g'(x) = -2x$. Tecknet nära $x = 0$ för $g'(x)$ har formen: $+\ 0\ -$. $g''(x) = -2 < 0$. Vi har $g'(0) = 0$ och $g''(0) < 0$.

- Metod 1. Använda första ordningens derivata och **dess tecken** för att bestämma det extrem värdet.

Om $f'(x)$ i närheten av $x = x_0$ har teck formen $-\ 0\ +$ (dvs ändrar tecken från negativt till positivt), har $f(x)$ ett lokalt minimum i x_0.

Om $f'(x)$ i närheten av $x = x_0$ har teck formen $+\ 0\ -$ (dvs ändrar tecken från positivt till negativt), har $f(x)$ ett lokalt maximum i x_0.

- Metod 2. Använda första ordningens derivata och **andra ordningens derivata** för att bestämma det extrem värdet.

Om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$ så är $f(x)$ lokal minimum i x_0.

Om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$ så är $f(x)$ lokal maximum i x_0.

Steg för att hitta extremvärden av $f(x)$ med första derivatans teckenmetod:

1. Beräkna derivatan $f'(x)$.
2. Lös ekvationen $f'(x) = 0$. Beteckna lösningen som $x = x_0$.
3. Analysera teckenbyte av $f'(x)$ nära $x = x_0$:
   - $+\ 0\ - \iff f(x)$ har ett lokalt maximum vid x_0;
   - $-\ 0\ + \iff f(x)$ har ett lokalt minimum vid x_0.
4. Beräkna extremvärdena.

Steg för att hitta extremvärden av $f(x)$ med första och andra derivatan:

1. Beräkna derivatan $f'(x)$.
2. Lös ekvationen $f'(x) = 0$. Beteckna lösningen som $x = x_0$.
3. Beräkna andra derivatan $f''(x)$.
4. Använd andraderivatatestet:
   - $f''(x_0) < 0 \iff f(x)$ har ett lokalt maximum vid x_0;
   - $f''(x_0) > 0 \iff f(x)$ har ett lokalt minimum vid x_0.
5. Beräkna extremvärdena.

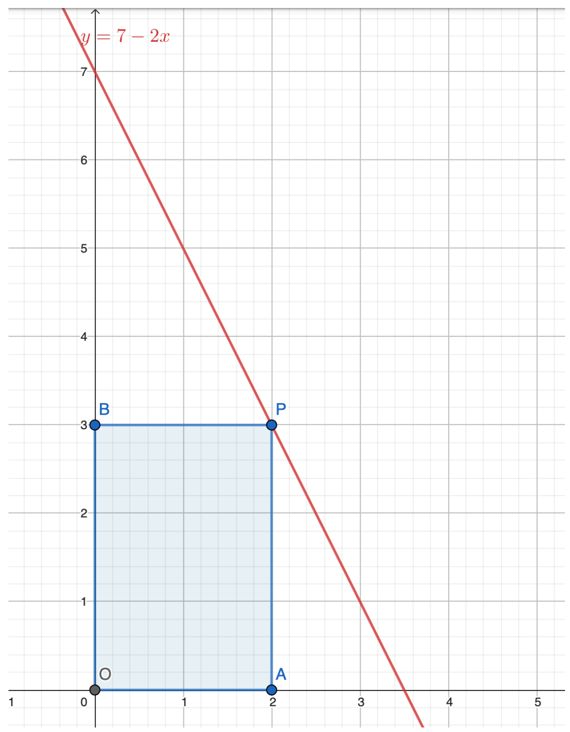
Diskutera i par. Ingen lösning krävs, och inga detaljer behövs. Diskutera likheter och skillnader mellan de två uppgifterna.**

Exempel 4253

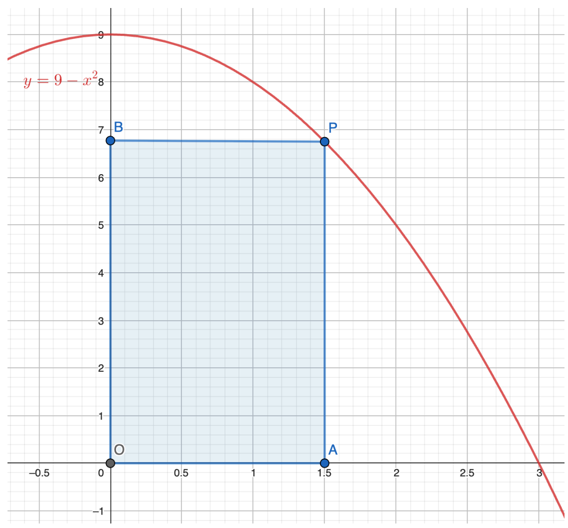
I figuren är linjen $y = 7 - 2x$ ritad i första kvadranten. En rektangel ritas under kurvan enlight figuren.

a) Bestäm en funktion $A(x)$ för rektangelns area.

b) Bestäm det största värdet som rektangelns area kan anta.



4253



4251

Exempel 4251

I figuren är kurvan $y = 9 - x^2$ ritad i första kvadranten. Rektangeln har ett hörn P på kurvan. När P varierar så varierar också rektangelns area.

a) Bestäm ett funktionsuttryck $A(x)$ för rektangelns area.

b) Bestäm det största värdet som rektangelns area kan anta.

Vi arbetar tillsammans i Uppgift 4253.

Lösning till 4253 a) Punkten P har koordinaterna $(x, 7 - 2x)$. Rektangelns area ges alltså av

$$A(x) = |OA| \cdot |OB| = x \cdot (7 - 2x),$$

och $0 < x < 3,5$.

b) Vi använder första ordningens derivata och dess tecken för att bestämma det största värdet.

$$A(x) = -2x^2 + 7x.$$
$$A'(x) = -2 \cdot 2x + 7 = -4x + 7.$$

Låt $A'(x) = 0$. Vi har $4x = 7$ och $x = \frac{7}{4}$.

Om $0 < x < \frac{7}{4}$ har vi $A'(x) > 0$. Om $\frac{7}{4} < x < 3,5$ har vi $A'(x) < 0$. Och $A'(\frac{7}{4}) = 0$. Så funktionen $A(x)$ har det största värdet vid $x = \frac{7}{4}$. Det största värde är

$$A(\frac{7}{4}) = -2\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{4} = -\frac{49}{8} + \frac{49}{4} = \frac{49}{8}.$$

Metod 2 för b). Vi använder första ordningens derivata och **andra ordningens derivata** för att bestämma det största värdet.

$$A(x) = -2x^2 + 7x.$$
$$A'(x) = -2 \cdot 2x + 7 = -4x + 7.$$
$$A''(x) = -4.$$

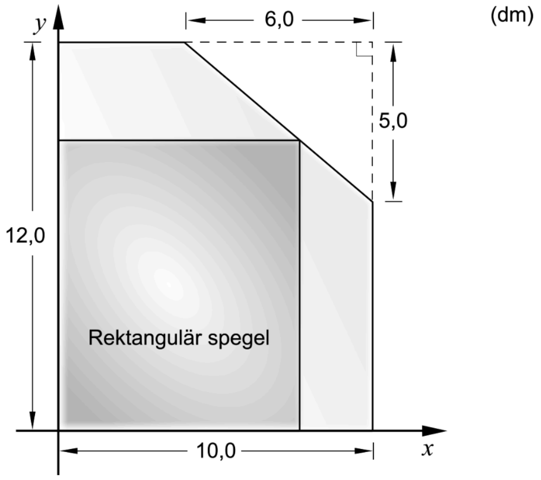
Låt $A'(x) = 0$. Vi har $4x = 7$ och $x = \frac{7}{4}$.
Vi har $A'(\frac{7}{4}) = 0$ och $A''(\frac{7}{4}) = -4 < 0$. Så funktionen $A(x)$ har det största värdet vid $x = \frac{7}{4}$. Det största värde är

$$A(\frac{7}{4}) = -2\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{4} = -\frac{49}{8} + \frac{49}{4} = \frac{49}{8}.$$

Diskutera i par. Ingen lösning krävs, och inga detaljer behövs. Diskutera likheter och skillnader mellan Uppg. 4253 och Ma3c-Np-vt-2014-25.

Exempel Ma3c-Np-vt-2014-25.

25. En glasmästare har av misstag skurit av ett hörn på ett rektangulärt spegelglas som hade måtten 12,0 dm × 10,0 dm. Den avskurna biten har formen av en rätvinklig triangel där de vinkelräta sidorna är 6,0 dm respektive 5,0 dm. Se figur.

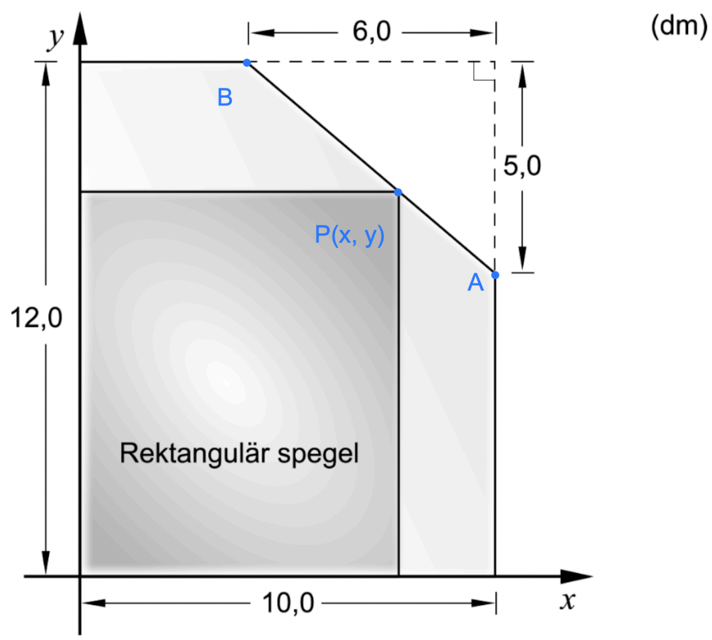


Glasmästaren vill använda det kvarvarande spegelglaset till en rektangulär spegel som har sitt ena hörn på den avskurna kanten. Glasmästaren vill också att spegeln ska få så stor area som möjligt.

Beräkna det mått på bredden som ger spegelns största area. (0/0/4)

Lösning till NpMa3c-vt-2014-25.

Steg 1. Vi ritar tre punkter A, B och P i koordinaterna.



Punkt A har koordinater $(10,\ 12-5) = (10,\ 7)$.

Punkt B har koordinater $(10-6,\ 12) = (4,\ 12)$.

Vi kan nu skriva ekvationen för linjen AB. Linjens lutning ges av $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{12-7}{4-10} = -\frac{5}{6}$. Skriv linjeformeln på formen $y = kx + m = -\frac{5}{6}x + m$. Vi sätter in koordinaten i ekvationen.

Vi har

$$12 = -\frac{5}{6} \cdot 4 + m.$$

Så $m = 12 + \frac{5}{6} \cdot 4 = 12 + \frac{10}{3} = \frac{46}{3}$.

Linjeekvationen är

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{46}{3}.$$

Och punkten P på linjeekvationen har koordinaterna $(x,\ y) = (x,\ \ -\frac{5}{6}x + \frac{46}{3})$.

Steg 2. Arean $A(x)$ av rektangulär spegel blir

$$A(x) = x \cdot (-\frac{5}{6}x + \frac{46}{3}) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{46}{3}x,$$

med $4 < x < 10$.

$$A'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{46}{3}.$$

Låt $A'(x) = 0$. Vi har $-\frac{5}{3}x + \frac{46}{3} = 0$ och $x = \frac{46}{5}$.

$$A''(x) = -\frac{5}{3}.$$

Vi har $A'(\frac{46}{5}) = 0$ och $A''(\frac{46}{5}) = -\frac{5}{3} < 0$. Så funktionen $A(x)$ har det största värdet vid $x = \frac{46}{5} = 9,2$.

Svar. När bredden är 9,2 dm (på x-axeln) är arean störst.

Vi behöver inte beräkna värdet $A(9,2)$.

Om du är intresserad finns det en Uppgift från Np i Kina.

Exempel Np 2020 Peking, Kina.

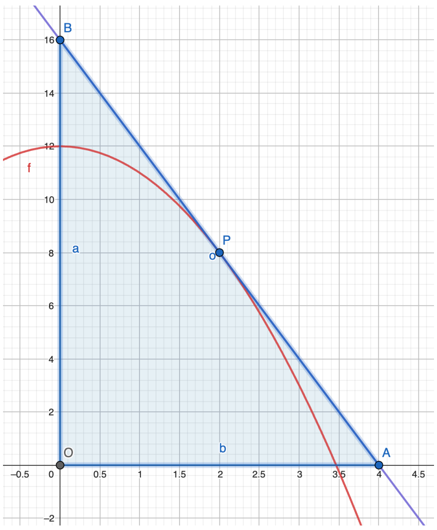
Låt $f(x) = 12 - x^2$.

a) Hitta ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ vars lutning är lika med -2.

b) Låt P vara en punkt på kurvan med koordinaterna $(t, f(t))$ och $0 < t < \sqrt{12}$.

Tangenten till kurvan $y = f(x)$ vid P och koordinataxlarna bildar en rätt triangel $\triangle OAB$. Beteckna dess area med $S(t)$.

Hitta minsta värdet för $S(t)$.



Lösning

a) *Steg 1.*Vi hittar tangentpunkten.

$f'(x) = (12 - x^2)' = -2x$. Om tangentens lutning är lika med -2 får vi

$$-2x = -2,$$

dvs $x = 1$. Vi beräknar värdet $f(1) = 12 - 1^2 = 11$. Då blir tangent punkten $(1, f(1)) = (1, 11)$.

Steg 2. Tangentens ekvation är $y = -2x + m$. Och punkten $(1, 11)$ ligger på tangenten, så vi har

$$11 = -2 \cdot 1 + m,$$

dvs $m = 13$.
Svar. Ekvationen för tangenten är $y = -2x + 13$.

b) *Steg 3* Vi hittar tangentlinjens ekvation. Lutning i punkten $P(t, f(t))$ är

$$f'(t) = -2t.$$

Tangentens ekvation är $y = -2t \cdot x + m$. Och punkten $(t, f(t))$ ligger på tangenten, så vi har

$$f(t) = -2t \cdot t + m,$$

dvs

$$12 - t^2 = -2t^2 + m.$$

Vi löser m:

$$m = 12 + t^2.$$

Ekvationen för tangenten är

$$y = -2t \cdot x + 12 + t^2.$$

Steg 4. Vi hittar areafunktionen $S(t)$. Arean av $\triangle OAB$ är

$$S(t) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB|.$$

Längden $|OB| = m = 12 + t^2$.

Längden på OA är x-koordinaten för punkten A. Punkt A har y-koordinaten 0. Vi tar värdet $y = 0$ i tangenten ekvation och beräknar dess x-koordinat.

$$\begin{aligned} 0 &= -2t \cdot x + 12 + t^2 \\ 2t \cdot x &= 12 + t^2 \\ x &= \frac{12 + t^2}{2t} \\ x &= \frac{6}{t} + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Då är $|OA| = \frac{6}{t} + \frac{t}{2}$.

Arean av $\triangle OAB$:

$$S(t) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2}(\frac{6}{t} + \frac{t}{2})(12 + t^2).$$

Vi förenklar funktionen:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}(\frac{6}{t} + \frac{t}{2})(12 + t^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{t} \cdot 12 + \frac{6}{t} \cdot t^2 + \frac{t}{2} \cdot 12 + \frac{t}{2} \cdot t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{72}{t} + 6t + 6t + \frac{t^3}{2}\right) \\ &= \frac{36}{t} + 6t + \frac{t^3}{4} \\ &= \frac{t^3}{4} + 6t + 36t^{-1}. \end{aligned}$$

Steg 5. Vi hittar minsta värdet för $S(t)$ genom att använda derivatan av $S(t)$ och dess andraderivata.

$$S'(t) = \frac{3}{4}t^2 + 6 - 36t^{-2}.$$

Låt $S'(t) = 0$. Vi har

$$\frac{3}{4}t^2 + 6 - 36t^{-2} = 0.$$

Beteckna t^2 med s. Vi har ekvationen för s.

$$\frac{3}{4}s + 6 - 36s^{-1} = 0.$$

Vi multiplicerar med s för båda sidor:

$$\frac{3}{4}s^2 + 6s - 36 = 0,$$

dvs

$$\frac{1}{4}s^2 + 2s - 12 = 0,$$

dvs

$$s^2 + 8s - 48 = 0.$$

Genom att använda pq-formen får vi lösningarna $s = 4$ och $s = -12$. Vi tar bort lösningen $s = -12$ eftersom $s = t^2$ är positiv. Då är $t^2 = 4$. Vi har $t = 2$, eftersom $0 < t < \sqrt{12}$.

$$S''(t) = \left(\frac{3}{4}t^2 + 6 - 36t^{-2}\right)' = \frac{3}{2}t - 36 \cdot (-2)t^{-3} = \frac{3}{2}t + 72t^{-3}.$$

Vi har

$$S''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 + 72(-2)^{-3} > 0.$$

Vi har $S'(2) = 0$ och $S''(2) > 0$, dvs funktionen

$$S(t) = \frac{t^3}{4} + 6t + 36t^{-1}$$

har minsta värdet för $t = 2$. Och

$$S(2) = \frac{2^3}{4} + 6 \cdot 2 + 36/2 = 2 + 12 + 18 = 32.$$

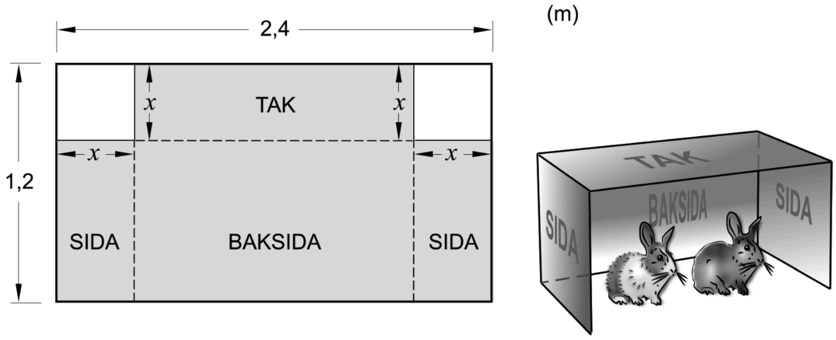
Svar. Minsta värdet av arean är 32.

Pass 2. 9.50 - 10.55.

Exempel Ma3c-Np-ht-2014-21.

21. Kajsa har en tunn plåt med måtten 2,4 m ×1,2 m. Av plåten ska hon bygga ett vindskydd till sina kaniner.

Vindskyddet ska bestå av ett tak, två sidor och en baksida. Kajsa tänker klippa bort två kvadratiska bitar från plåten och sedan vika ihop plåten till ett vindskydd. Kajsa vill att vindskyddet ska få så stor volym som möjligt. Anta att de plåtbitar hon ska klippa bort har längden x meter där $0 < x < 1{,}2$
Se figur.



Bestäm x så att vindskyddet får så stor volym som möjligt. (0/3/0)

Diskutera i par: Vad är volymen $V(x)$ som en funktion av x?

$$V(x) = (2,4 - 2x)(1,2 - x)x,$$

med $0 < x < 1,2$.

Skiss av lösningen.

Förenkla funktionen $V(x)$.

$$V(x) = 2x^3 - 4,8x^2 + 2,88x.$$

$$V'(x) = 6x^2 - 9,6x + 2,88.$$

För att hitta extrempunkten löser vi ekvationen $V'(x) = 0$. Dvs

$$6x^2 - 9,6x + 2,88 = 0.$$

Den är ekvivalent med ekvationen

$$x^2 - 1,6x + 0,48 = 0.$$

Genom att använda pq-formen får vi $\frac{p}{2} = \frac{-1{,}6}{2} = -0,8$, $q = 0,48$, och

$$x = -(-0,8) \pm \sqrt{0,64 - 0,48} = 0,8 \pm 0,4.$$

Då är $x_1 = 0,4$ och $x_2 = 1,2$. Vi tar bort x_2 eftersom $0 < x < 1,2$.

Den andra derivatan av $V(x)$ är

$$V''(x) = (6x^2 - 9,6x + 2,88)' = 12x - 9,6.$$

$$V''(0,4) = 12 \cdot 0,4 - 9,6 = -4,8 < 0.$$

Vi har $V'(0,4) = 0$ och $V''(0,4) < 0$ så är $V(0,4)$ lokal maximum.

Svar. $x = 0,4$ meter så att vindskyddet får så stor volym som möjligt.

Aktivitet i Matematik Origo: Vilken volym är störst?

- Säg till eleven att de inte behöver göra funktionsvärdetabellen.
- Jobba direkt till volym funktionen $V(x)$.

$$V(x) = (30 - 2x)(21 - 2x)x,$$

med $0 < x < \frac{21}{2} = 10,5.$

Skiss av lösningen. Förenkla funktionen $V(x)$.

$$V(x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x.$$

$$V'(x) = 12x^2 - 204x + 630.$$

$$V''(x) = 24x - 204.$$

För att hitta extrempunkten löser vi ekvationen $V'(x) = 0$.

Vi hittar två lösningar $x_1 = 4.06$, $x_2 = 12.95$. Men vi tar bort x_2 eftersom $0 < x < 10,5$.

Då är

$$V''(4,06) = 24 \cdot 4,06 - 204 < 0.$$

Vi har $V'(4,06) = 0$ och $V''(4,06) < 0$ så är $V(4,06)$ lokal maximum.