Trigonometri II

Wanmin Liu

Ma3c

- Repetition.
  - Enhetscirkeln
  - Definitioner av sinus-, cosinus- och tangentfunktioner
  - Trigonometriska ettan.
- Cirkelns ekvation

Repetition.

En enhetscirkel är en cirkel med radie 1 och centrum i origo O.

Punkt P på cirkeln har koordinaten $(x = \cos v,\ y = \sin v)$, där v är vinkeln från den positiva x-axeln till linjen OP.

$$\text{Positiv vinkel} \Longleftrightarrow \text{moturs} \qquad \text{Negativ vinkel} \Longleftrightarrow \text{medurs}$$

Exempel. Trigonometriska ettan.

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1,$$

där $\sin^2(A)$ betyder $(\sin(A))^2 = \sin(A) \cdot \sin(A)$.

Cirkelns ekvation

Enhetscirkel har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1,$$

det vill säga, för varje punkt $P(x, y)$ på cirkeln uppfyller dess koordinater ekvationen $x^2 + y^2 = 1$.

Fråga: Vad är ekvationen för en cirkel med radie r och medelpunkten P_0 med koordinater (x_0, y_0)?

Om vi betecknar punkten P på cirkeln med koordinaterna (x, y), då är avståndet $PP_0 = r$.

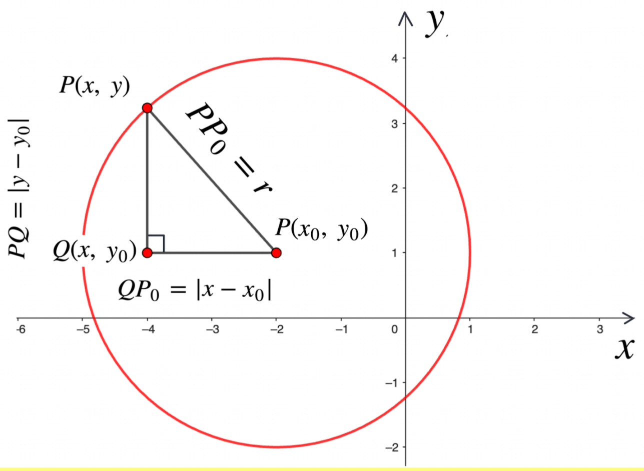
Beteckna Q med koordinaterna $(x,\ y_0)$. Då är PQP_0 en rätvinklig triangel. Vi kan använda Pythagras sats.

$$QP_0^2 + PQ^2 = PP_0^2,$$

där $QP_0 = |x - x_0|$, $PQ = |y - y_0|$ och $PP_0 = r$.

En cirkel med radien r och medelpunkten i (x_0, y_0) beskrivs av ekvationen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



Pythagoras sats $QP_0^2 + PQ^2 = PP_0^2$ $\Longleftrightarrow$ **Cirkelns ekvation** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$

Exempel. (NpMa3c vt 2015, n.11, (2/0/0))
En cirkel har ekvationen $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64$. Undersök om punkten $(10,\ 6)$ ligger på cirkeln.

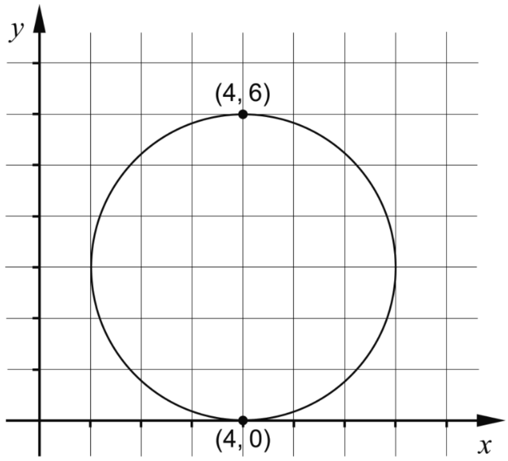
Lösning. Vi sätter in $(10,\ 6)$ i ekvationen.

$$\mathrm{VL} = (10 - 3)^2 + (6 - 2)^2 = 49 + 16 = 65 \neq \mathrm{HL}.$$

Svar: Punkten med koordinaterna $(10,\ 6)$ ligger *inte* på cirkeln.

Exempel. (Ma3c-vt13-5, (1/0/0))

5. I figuren visas en cirkel som tangerar x-axeln i punkten $(4,0)$.
Punkten $(4,6)$ ligger på cirkeln. Ange cirkelns ekvation.



_____________________ (1/0/0)

Lösning Cirkeln med radie 3 och medelpunkten $(4, 3)$. Cirkelns ekvationen är

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2.$$

Cirklarnas ekvation i icke-standardform.

Om cirkelns ekvation inte är i standardformen ovan måste vi använda formlerna

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

för att komplettera kvadraten och skriva om ekvationerna till standardform.

Exempel (6153 c.) Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0.$$

Lösning. Vi observerar att $x^2 - 4x = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x$. För att komplettera kvadratformeln för $x^2 - 4x$ måste vi addera 2^2 på båda sidor av ekvationen.

Samma idé för uttrycket $y^2 + 6y = y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y$. För att komplettera kvadraten måste vi addera 3^2 på båda sidor av ekvationen.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 &= 0, \\ x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 + 4 &= 2^2 + 3^3. \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 + 4 &= 2^2 + 3^2. \\ (x-2)^2 + (y-(-3))^2 &= 3^2. \end{aligned}$$

Svar: Medelpunkten är $(2, \quad -3)$ och radien är 3.

Sammanfatting av trigonometrisk funktioner

1. **trigonometriska ettan.**

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1.$$

2. **Periodicitet.**

$$\begin{aligned} \sin(v) &= \sin(v + 360^\circ), \\ \cos(v) &= \cos(v + 360^\circ), \\ \tan(v) &= \tan(v + 180^\circ). \end{aligned}$$

3. **Symmetri.** Punkten P i enhetscirkeln med koordinater $(x, y) = (\cos(v), \sin(v))$.

   - Symmetripunkten med y-axeln är $(-x, y) = (-\cos(v), \sin(v))$.

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - v) &= -\cos(v), \\ \sin(180^\circ - v) &= \sin(v). \end{aligned}$$

   - Symmetripunkten med x-axeln är $(x, -y) = (\cos(v), -\sin(v))$.

$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos(v), \\ \sin(-v) &= -\sin(v). \end{aligned}$$

4. $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ är **lutningen** för OP, där O är origo.

5. En cirkel med radien r och medelpunkten i (x_0, y_0) beskrivs av ekvationen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$