PYTHAGORAS SATS

WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

10 februari 2024

Abstract

Den här artikeln ger ett exempel på hur eleverna skulle kunna tillämpa Pythagoras sats. Vi konstruerar en analytisk uppgiftsspecifik bedömningsmatris och bedömer fem lösningar.

Nyckelord: Pythagoras sats, area, liksidig triangel, Sierpińskitriangel.

1 PROBLEM: SIERPIŃSKITRIANGEL

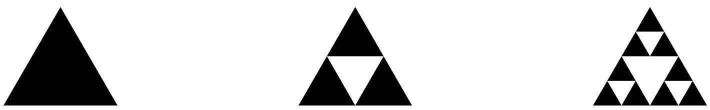
Exempel 1.1. Triangel $\triangle ABC$ är en liksidig triangel, vilket betyder att dess tre sidor är lika långa.

Steg 1. Om vi antar att den sidolängden är 3, vad är arean av triangeln $\triangle ABC$?

Steg 2. Om vi antar att den sidolängden är ett positivt tal a, och vi betecknar detta arean vid A_0, vad är arean A_0 av triangeln $\triangle ABC$ uttryckt i termer av a?

Steg 3. Vi fortsätter med Steg 2. Beteckna mittpunkterna på de tre sidorna med D, E, F. Vi tar bort triangeln $\triangle DEF$ från triangeln $\triangle ABC$ och betecknar arean av den återstående regionen med A_1. Vad är A_1 i uttrycket A_0?

Steg 4. För den återstående regionen i Steg 3, upprepar vi processen i Steg 2. Det vill säga att vi tar bort varje triangel med dess inre mitttriangel som Steg 2. Beteckna arean av den återstående regionen med A_2. Vad är A_2 i uttrycket av A_1?



Steg 2 Steg 3 Steg 4

Kommentar 1.2. Vi kan upprepa processen, och gränstalet kallas *Sierpińskitriangel* [1].

2 FÖRESLAGEN LÖSNING.

Steg 1. Vi utgår från punkt A och drar en vinkelrät linje mot BC. Foten av en vinkelrät betecknas som punkt M.

Beteckna $|BC|$ som längden av linjesegmentet BC. Sedan $|BM| = |CM| = \frac{1}{2}|BC|$ och triangeln $\triangle AMB$ är rätvinklig med den räta vinkeln $\angle AMB$. Vi kan använda *Pythagras sats* till den räta triangeln $\triangle AMB$ och har relationen

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2.$$

Nu $|AB| = 3$ och $|BM| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{3}{2}$. Så vi har

$$|AM| = \sqrt{3^2 - \frac{3}{2}^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Då ges

$$\text{Arean av } \triangle ABC = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AM| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Steg 2. Beräkningen liknar Steg 1. Nu $|AB| = a$ och $|BM| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{a}{2}$. Med *Pythagras sats* har vi

$$|AM| = \sqrt{a^2 - \frac{a}{2}^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

och

$$A_0 = \text{Arean av } \triangle ABC = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AM| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \tag{2.1}$$

Steg 3. Vi har två metoder för att beräkna arean för den återstående regionen.

Metod 1. Beräkna arean för $\triangle DEF$. Triangeln $\triangle DEF$ är också en liksidig triangel med sidans längd $\frac{a}{2}$. Genom att använda formeln (2.1) har vi

$$\text{Arean av } \triangle DEF = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}A_0. \tag{2.2}$$

Då följer att

$$A_1 = \text{Arean av } \triangle ABC - \text{Arean av } \triangle DEF = \frac{3}{4}A_0. \tag{2.3}$$

Metod 2. Inget behov av att beräkna arean för $\triangle DEF$. Med hjälp av bilden i Steg 3 finner vi att arean av den vita triangeln ($\triangle DEF$) är lika med arean av en svart triangel. Den återstående arean

$$A_1 = \frac{3}{4}A_0.$$

Steg 4. Med samma anledning i *Metod 2* i Steg 3 har vi

$$A_2 = \frac{3}{4}A_1.$$

□

Kommentar 2.1. Watson & Mason (1998) [2] (också Skott [3], sidorna 231 till 234) är viktig. Steg 1 (*"att exemplifiera och specialisera"*) till Steg 4 (*"att jämföra, sortera och organisera"*) är processen från konkret till abstrakt.

Kommentar 2.2. Detta är ett exempel på fraktal geometri. Vi får i allmänhet att $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$. Jag tycker att Jaworskis undervisningstriaden (Skott [3], sidan 254) är viktig för undervisningen. Problemet jag designade kommer från den mycket grundläggande nivån av arean av en liksidig triangel, till en hög nivå av fraktal geometri av Sierpińskitriangel. Jag tror att denna fråga också är intressant för elever. Eftersom de kan lösa arean problem. Därmed öppnar dörren till avancerad fraktalgeometri problem. Det är ett exempel av Jaworskis *Mathematical challenge* (Skott [3] sidan 254).

3 BEDÖMNINGSMATRIS

3.1 Generell bedömningsmatris

Vi använder matrisen *generell bedömningsmatris* i dokumentet [4] (sidan 13).

Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning		Eleven tolkar enkel skriftlig information med matematiskt innehåll. Eleven tolkar resultat och drar någon relevant slutsats.	
Begrepp		Eleven använder olika begrepp i välkända sammanhang.	
Metoder		Eleven genomför metoder och beräkningar godtagbart.	
Resonemang		Eleven ställer och besvarar frågor som i huvudsak hör till ämnet matematik.	
Kommunikation		Eleven använder matematikens uttrycksformer med viss anpassning till sammanhanget.	

3.2 Vilka val du har gjort när du utformade din matris?

I boken [3, s. 292, 293] skrivs att:

> *Den andra anledningen att utvärdera är att man vill planera undervisningen utifrån elevernas nuvarande förståelse och kunnande. Denna form av utvärdering förhåller sig till lärprocessens utveckling över tid. Vi kallar den* formativ utvärdering *eftersom den ska användas till att utforma undervisningen.*

Vi använder den formativa bedömningen [5] [6]. Vi ger mer detaljer i det följande.

Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning	Steg 1. Eleven vet area av triangeln.	Steg 1 och Steg 2. Eleven vet arean av trigngel. Eleven kan hitta höjden.	Steg 1 till Steg 4.
Begrepp	Area av triangeln.	Area av triangeln, triangelns höjd.	Area av triangeln, triangelns höjd, Pythagoras sats.
Metoder	Eleven vet det Area$\triangle = \frac{1}{2}\text{bas} \cdot$ höjd.	Eleven vet det Area$\triangle = \frac{1}{2}\text{bas} \cdot$ höjd. Eleven vet att triangelns höjd kan hittas genom att använda Pythagoras sats.	Eleven vet det Area$\triangle = \frac{1}{2}\text{bas} \cdot$ höjd. Eleven vet att triangelns höjd kan hittas genom att använda Pythagoras sats och eleven beräknar höjden.
Resonemang	Eleven använder den allmänna formeln för triangelns area utan förklaring, till exempel vilken del är basen och vilken del är höjden.	Eleven förklarar beräkningen av höjd med hjälp av Pythagoras sats.	Eleven förklarar beräkningen av höjd med hjälp av Pythagoras sats. Eleven förklarar arean av den mellersta lilla triangeln är en fjärdedel av arean av den ursprungliga triangeln.
Kommunikation		Det matematiska uttrycket skrivs konkret.	Det matematiska uttrycket skrivs konkret och den skrivna texten är på ett logiskt sätt med matematiska uttrycket. Det är en fördel att skriva med en bild.

3.2.1 *Problemlösning*

Det givna problemet är redan uppdelat i fyra delar (Steg 1 till Steg 4), från konkret till allmänt. Eleven får E om de kan visa Steg 1. Eleven får A om de kan visa Steg 4.

3.2.2 *Begrepp*

Den centrala innehallen är Pythagoras sats. Eleverna skulle förstå begreppen som: Pythagoras sats, rät triangel, area av en triangel, jämförelse av trianglar, liksidig triangel.

Det skulle vara en fördel om eleverna använda exponentiell funktion. Men vi antar *inte* att eleverna kommer att förstå allmänna relationen genom att använda begreppet exponentiell funktion, till exempel, $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$.

3.2.3 *Metoder*

Eleverna bör förstå att Steg 1 och Steg 2 ska vara i samma metod.

Steg 3 skulle kunna lösas med samma metod som steg 2 (*Metod 1* i lösning), med skillnaden mellan arean av två trianglar.

Steg 3 kan också lösas genom att observera att triangeln i mitten är en fjärdedel av den ursprungliga triangeln.

3.2.4 *Resonemang*

Den väsentliga delen är att hitta triangelns höjdlängd med hjälp av Pythagoras sats.

Eleverna ska också förklara i Steg 3 varför arean av den lilla triangeln i mitten är en fjärdedel av hela triangelns area.

3.2.5 *Kommunikation*

Eleverna kan använda grafik för att förklara.

Eleverna använder bokstäver och variabler för att uttrycka matematiska idéer tydligt.

4 BEDÖMNING AV FÖRESLAGEN LÖSNING.

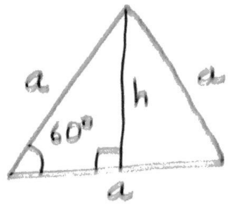
Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning			Problemet löses tydligt från det konkreta fallet i steg 1 till det allmänna fallet i steg 4.
Begrepp			Begreppen i Pythagoras sats, areaformeln är välskriven.
Metoder			Metoden för beräkningsområdet är välskriven. För steg 3 ger det två sätt att beräkna arean.
Resonemang			Orsaken till höjdens längd framgår väl genom att använda Pythagoras sats.
Kommunikation			Matematikens uttryck är tydligt.

5 BEDÖMNING AV LÖSNING AV ELEV A.

Detta är en lösning från elev A.

Wanmin

a)

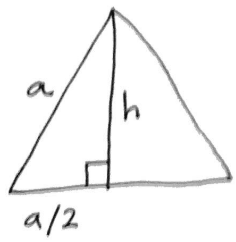


$\sin 60° = h/a$ så $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ så arean är

$\frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$; $a = 3$ ger $\frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 3{,}9$.

$A_1 = \frac{3}{4} A_0$, $A_2 = \frac{3}{4} A_1$ (vi tar bort 1/4 av varje deltriangel), så $A_n = (3/4)^n A_0$.

b)



$$h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{3a^2/4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

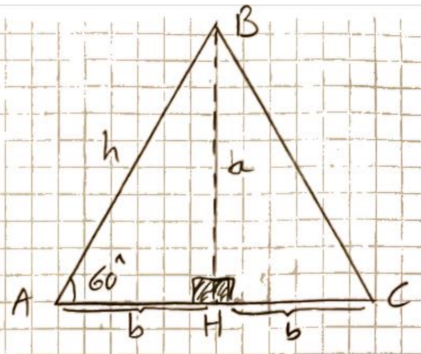
Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning			Eleven ger den fullständiga lösningen på varje problem.
Begrepp			Begreppen i Pythagoras sats, areaformeln är välskriven. Eleven förstår begreppet exponentiell funktion.
Metoder			Det allmännan problem (Steg 2) är löst först med en effektiv generell metod. Då tar det värdet $a = 3$ för det konkreta problem i Steg 1.
Resonemang			Eleven använder Pythagoras sats för att räkna ut höjden h på triangeln.
Kommunikation			Det är bra att eleven rita en bild.

6 BEDÖMNING AV LÖSNING AV ELEV B.

Detta är en lösning från elev B.

Wanmin Liu

Liksidig triangel



1) Pythagoras sats:

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = a^2 + b^2 \\ h = 3 \\ b = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = h^2 - b^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{36-9}{4} = \frac{27}{4}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3\times 9}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Arean: $A = \frac{a \times 2b}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$

2) $a^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Arean: $A = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

Eller

1) $a = h \times \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Area: $A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

2) Area: $\frac{1}{2} \times a \times a \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning			Eleven ger den lösningen på Steg 1 och Steg 2.
Begrepp			Begreppen i Pythagoras sats, areaformeln är välskriven.
Metoder			Metoden för att beräkna arean i Steg 1 är tydlig. Samma metod tillämpas på Steg 2.
Resonemang			Eleven använder Pythagoras sats för att räkna ut höjden på triangeln $\triangle AHB$.
Kommunikation			Det är bra att eleven rita en bild. Eleven använder sin egen symbol för längden $h = \|AB\|$ och höjd $a = \|BH\|$. Men det står tydligt skrivet på bilden. Så det finns ingen förvirring.

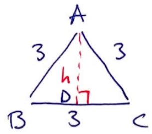
7 BEDÖMNING AV LÖSNING AV ELEV C.

Detta är en lösning från elev C.

Eleven kunde till och med skapa sitt eget problem för *Steg 5*. Han kunde hitta de allmänna sambanden genom att använda exponentiell funktion $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$. Varje steg följer med en fin bild.

Wanmins uppgift:

(1)



Arean av ΔABC ges av

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{|BC| \cdot h}{2} \quad (1)$$

I den rätvinkliga triangeln ΔADC kan vi använda Pythagoras sats

$$\left.\begin{aligned} &|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2 \\ &|DC| = \frac{|BC|}{2} = \frac{3}{2} \\ &|AD| = h \end{aligned}\right\} \rightarrow h^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3^2$$

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Svar: $A = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ a.e.

(1), (2) ger $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

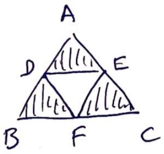
(2)

P.s.s. som ovan $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$$h = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$A_0 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

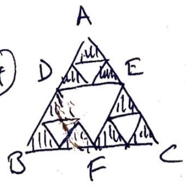
(3)



Arean av ΔDEF är $\frac{1}{4}$ av arean av ΔABC (p.g.a likformighet som ger kongruenta trianglar $\Delta ADE, \Delta BDF, \Delta DEF, \Delta FEC$)

$$A_1 = A_0 - \frac{A_0}{4} = A_0\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3A_0}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2^4}$$

(4)



P.s.s. som i (3) försvinner $\frac{1}{4}$ av arean i trianglarna $\Delta ADE, \Delta BDF, \Delta FEC$

$$A_2 = A_1 - 3\,\frac{A_0/4}{4} = \frac{3A_0}{4} - \frac{3A_0}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3A_0}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9A_0}{16} = \frac{3^2\sqrt{3}a^2}{2^6}$$

(5) Det verkar att om man fortsätter p.s.s. ta bort allt mindre trianglar så kan återstående arean beräknas som

$$A_n = A_1 \cdot \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{3A_0}{4} \cdot \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} \cdot \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$$

Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning			Varje problem är klart löst. Eleven kan till och med skapa sitt eget problem för steg 5.
Begrepp			Begreppen i Pythagoras sats, areaformeln är välskriven. Exponentiell funktion $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$ ges.
Metoder			Använder en effektiv generell metod.
Resonemang			Eleven använder Pythagoras sats för att räkna ut höjden på triangeln $\triangle ADB$.
Kommunikation			Det är bra att eleven rita bild.

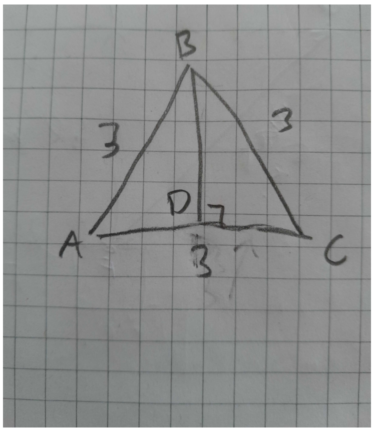
8 BEDÖMNING AV LÖSNING AV ELEV D.

Detta är en lösning från elev D.

Wanmins problem löst av Lars

Steg 1

För att beräkna arean använder jag formeln $A = \frac{bh}{2}$ där b är basen och h höjden i triangeln. I vår triangel är basen 3cm och höjden är en lodrät linje, AD, från toppspetsen av triangeln till mittpunkten på basen, eftersom triangeln är liksidig.



Höjdens längd kan beräknas med Pythagoras sats som

$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{3*3*3}{4}} = 3\sqrt{\frac{3}{4}} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

Arean blir

$\frac{bh}{2} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 9\frac{\sqrt{3}}{2}$

Steg 2

Om vi ersätter 3 med a får vi ett likande uttryck för h

$h = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

Arean blir

$A_0 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

Steg 3

I steg 3 skapas 4 liksidiga trianglar med samma sida $\frac{a}{2}$. Arean av den svarta delen, 3 av de fyra mindre trianglarna, blir därför

$A_1 = \frac{3}{4}A_0$

Steg 4

I steg 4 delas varje fylld triangel i figuren från steg 3 i 4 delar på samma sätt. Sidan i varje delad triangel är $\frac{a}{4}$. Arean av den svarta delen blir då

$A_2 = \frac{3}{4}A_0 - \frac{3}{16}A_0 = \frac{12-3}{16}A_0 = \frac{9}{16}A_0 = \frac{3}{4}A_1$

Bedömningen avser	På väg mot godtagbar nivå	Godtagbar/E-nivå	Högre nivå
Problemlösning			Varje problem är klart löst.
Begrepp			Begreppen i Pythagoras sats, areaformeln är välskriven.
Metoder			Använder en effektiv generell metod.
Resonemang			Eleven använder Pythagoras sats för att räkna ut höjden på triangeln $\triangle ADB$. I Steg 3 ger eleven också tydliga skäl till att de fyra små trianglarna har samma area.
Kommunikation			Det är bra att eleven rita bild.

REFERENCES

[1] 'Sierpiński triangle'. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sierpi%C5%84ski_triangle&oldid=1194000829. Page Version ID: 1194000829.

[2] Anne Watson and John Mason, *Questions and prompts for mathematical thinking.* Association of Teachers of Mathematics.

[3] Jeppe Skott, Kristine Jess, Hans Christian Hansen, Sverker Lundin, and Joachim Retzlaff, *Matematik för lärare Delta Didaktik.* Gleerups Utbildning.

[4] *Bedömning för lärande i matematik årskurs 1–9.* Skolverket.

[5] *Kunskapsbedömning i skolan : praxis, begrepp, problem och möjligheter.* Skolverket ;. http://www.skolverket.se/publikationer?id=2660.

[6] Anna Grettve, Marie Israelsson, and Anders Jönsson, *Att bedöma och sätta betyg : tio utmaningar i lärarens vardag.* Natur & Kultur.