
W A N M I N L I U

Math is fun!

October 11, 2026

Från 500 till ett allmänt bevis – när ett svårare problem blir enklare

Visa att det finns $w \in \mathbb{R}$ sådant att

$$\sum_{k=0}^{500} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor wx \rfloor$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

I matematik försöker vi ofta förenkla svåra problem. Men ibland kan det vara precis tvärtom: **genom att göra ett problem mer allmänt kan det bli lättare att lösa.**

Jag vill dela med mig av ett exempel från min egen matematiska problemlösning. Det handlar om en identitet med heltalsdelen av reella tal (*floor function*). Heltalsdelen av ett tal är det största heltalet som inte överstiger talet. Till exempel är heltalsdelen av 3,7 lika med 3.

Det ursprungliga problemet: visa att det finns ett reellt tal w sådant att

$$\sum_{k=0}^{500} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor wx \rfloor \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Här innehåller summan 501 termer, och uppgiften är att bestämma ett värde på w som gör att identiteten gäller för alla reella tal x .

Att hitta svaret är inte samma sak som att bevisa det

Till en början visste jag inte hur jag skulle lösa problemet. Jag försökte därför välja speciella värden på variabeln för att förenkla uttrycket.

Först fick jag ett intervall där det okända talet måste ligga. Sedan utvecklade jag samma idé genom att undersöka en hel familj av speciella värden. Med hjälp av ett gränsvärde kunde jag till slut bestämma det enda möjliga värdet: **1 delat med 2 upphöjt till 501**.

Men problemet var fortfarande inte löst.

Jag visste nu **vad svaret måste vara, men inte hur jag skulle bevisa att det fungerar för alla reella tal**.

Mina försök med speciella värden hade hjälpt mig att hitta svaret, men de gav mig ingen tydlig idé om hur jag skulle bevisa identiteten. Jag behövde alltså hitta en annan väg.

Varför just 500?

Jag började fundera på om talet 500 verkligen hade någon särskild betydelse. Varför inte 10, 100 eller ett godtyckligt heltal?

Därför ändrade jag problemet. I stället för det fasta talet 500 använde jag en variabel, m .

Det allmänna problemet: för varje heltal $m \geq 0$, hitta ett reellt tal w_m sådant att

$$\sum_{k=0}^m \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor w_m x \rfloor \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Vid första anblicken verkar detta göra problemet svårare. Men generaliseringen gav mig en ny möjlighet: jag kunde börja med de allra enklaste fallen, $m = 0$ och $m = 1$.

Syftet var nu inte främst att hitta det okända talet igen, utan att **upptäcka en metod för att bevisa identiteten**.

Genom att undersöka dessa enkla fall kunde jag inte bara se ett mönster i svaren, utan framför allt upptäcka en struktur i själva bevisen.

Här blev ett specialfall av **Hermites identitet för heltalsdelen** ett viktigt verktyg. Genom att använda identiteten upprepade gånger kunde jag visa hur

mellanliggande termer tog ut varandra, som i en *teleskoperande summa*. Samma idé kunde sedan användas för ett godtyckligt m .

På så sätt kunde jag bevisa den allmänna formeln och därmed också lösa det ursprungliga problemet med 500.

Några tankar om matematiskt tänkande

Det mest intressanta för mig är inte själva formeln, utan hur lösningen växte fram.

Jag använde alltså **två olika generaliseringar**. Först gick jag från ett enda testvärde till en hel familj av värden. Det gjorde att jag kunde bestämma vilket värde det okända talet måste ha.

Sedan gick jag från det fasta talet 500 till ett godtyckligt m . Det gjorde att jag kunde undersöka enklare fall och upptäcka en struktur som fungerade även i det allmänna fallet.

De två generaliseringarna hade alltså olika syften. Den första hjälpte mig att hitta det enda möjliga svaret. Den andra hjälpte mig att hitta ett bevis.

Detta illustrerar också en viktig skillnad i matematik: att upptäcka vad som måste vara sant är inte samma sak som att bevisa varför det är sant.

För mig är detta en viktig del av matematiskt tänkande, och något som också är värdefullt i matematikundervisningen. När vi inte vet hur ett problem ska lösas kan vi ibland komma vidare genom att ändra frågan och undersöka dess enklaste fall.

Vad måste vara sant? Och varför är det sant?

Det är två olika frågor, och ibland behöver vi olika matematiska idéer för att besvara dem.

Läs hela den matematiska undersökningen

I den engelska artikeln visar jag hela utforskningen, från det ursprungliga problemet till det allmänna beviset, med alla matematiska detaljer.

[From 500 to a General Formula: Exploring a Floor Identity \(PDF\)](#)